Une méthode d'approximation numérique appliquée à π

Benoit De Coninck

20 mars 2015

1 Introduction

Pour être une approximation numérique intéressante de π, l'expression mathématique proposée doit donner un maximum de chiffres significatifs exacts en utilisant une combinaison de nombre les plus petits possibles ou présentant une certaine harmonie.

Dans son livre « Le fascinant nombre π », Monsieur J.P. Delahaye présente une formule d'approximation de π du mathématicien Srinivasa Ramanujan en s'interrogeant : « ..., dont on se demande si elle ne résulte pas seulement d'un jeu ... ? ».

En partant de l'idée qu'effectivement, il s'agit d'un jeu, la question qui s'impose immédiatement est : quelles sont les règles de ce jeu ?

2 Recherche des règles du jeu

2.1 Première piste : les fractions continues régulière

Ramanujan était un mathématicien de génie qui pensait les nombres en terme de fractions continues. Il est effectivement possible de donner des approximations de π sous la forme d'un quotient de 2 entiers en partant de la décomposition de π en fraction continue régulière :

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \dots}}}}} = (3+1/(7+1/(15+1/(1+1/(292+1/(1+.....))))))$$

soit en format abrégé : $\pi = [3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ ....]$ qui donne la suite de fractions réduites :

$$\left[\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \dots\right]$$

En calculant les différentes valeurs de ces fractions, on constate que l'approximation donnée par $\frac{355}{113} = 3.141592|92$ est bien supérieure à celle donnée par $\frac{333}{106} = 3.1415|094$ qui porte pourtant sur des entiers de même grandeur. Le nombre 292 présent dans la liste des éléments de la fraction continue régulière de π nous indique une méthode directe pour prévoir ce type de comportement : un « grand nombre »implique une bonne approximation par la fraction réduite obtenue avec les éléments précédent ce « grand nombre ».

En regardant de plus près cette série d'approximations de π donnée par Ramanujan :

$$\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(102 - \frac{2222}{22^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(97 + \frac{1}{2} - \frac{1}{11}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(97 + \frac{9}{22}\right)^{\frac{1}{4}}$$

on peut se demander ce que donne la décomposition de π^4 en fraction continue régulière :

$$\pi^4 = 97.40909103... = [97, 2, 2, 3, 1, 16540, ...]$$

16540 étant un « très grand nombre », on peut prévoir que la fraction réduite précédent l'utilisation de cet élément sera une très bonne approximation de π. En effet,$(\frac{2143}{22})^{\frac{1}{4}} = 3.14159265|258$ est une très bonne approximation. On remarque d'ailleur que les quatres approximations données par Ramanujan sont toutes des expressions différentes de cette même fraction qui visiblement lui avait tapé dans l'oeil.

Nous pouvons donc conclure cette première piste par l'énoncé :

Règle 1 : *décomposer en fraction continue régulière.*

2.2 Application de la règle 1

Si on prend un nombre dérivant de π : soit $\frac{\pi}{\sqrt{7}} = 1.187410412...$ que l'on décompose en une fraction continue régulière, nous obtenons : [1, 5, 2, 1, 42, 1, 10, ...]. « 42 »étant un nombre plus grand que les autres, on en déduit que la fraction réduite $\frac{19}{16}$ correspondant aux éléments précédents 42 est une bonne approximation.

De fait, $\frac{\pi}{\sqrt{7}} \approx \frac{19}{16}$, qui peut s'écrire $\pi \approx \frac{19}{16}\sqrt{7}$ est une approximation de π déjà donnée par Ramanujan. Nous sommes sur la bonne voie.

2.3 Seconde piste : posons une équation

En regardant la formule $\pi \approx \frac{355}{113}(1 - \frac{0.0003}{3533})$ de Ramanujan, on remarque que $\frac{355}{113}$ est une des fractions réduites provenant de la décomposition en fraction continue régulière de π. Si on compare les deux fractions réduites suivantes :

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{355}{113} = 3.141592|920\ldots$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{14}}}}}}}}}}}} = \frac{80134857}{25510582} = 3.14159265358979|43\ldots$$

on constate que $\frac{355}{113} > \frac{80134857}{25510582}$. Donc il existe un réel x tel que :

$$\begin{aligned}
&\frac{355}{113}(1-x) = \frac{80134857}{25510582} \\
&=> (1-x) = \frac{80134857}{25510582}\frac{355}{113} \\
&=> x = \frac{769}{9056256610} = \frac{0.0003}{3532.999978351\ldots} \\
&=> x \approx \frac{0.0003}{3533} \\
&=> \pi \approx \frac{355}{113}(1 - \frac{0.0003}{3533})
\end{aligned}$$

Il est également possible d'écrire directement l'équation $\pi = \frac{355}{113}(1-x)$ et d'en chercher la solution :

$$x = 1 - \frac{113\pi}{355} = 0.0000000849136\ldots$$

Cette équation contenant π permet d'écrire une approximation pour π. Nous pouvons donc énoncer la :

Règle 2 : *poser une équation permettant d'obtenir π comme résultat.*

3 Utilisation des règles 1 et 2

3.1 Exemple 1

En reprennant la formule précédente $\pi = \frac{355}{113}(1-x)$ et sa solution $x = 8.49136\ldots 10^{-8}$ que nous décomponsons en fraction continue régulière [0, 11776666, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, ...], nous pouvons écrire les fractions réduites :

$$\left[\frac{1}{11776666}, \frac{1}{11776667}, \frac{2}{23553333}, \frac{3}{35330000}, \frac{5}{58883333}, \ldots, \frac{76}{895026663}, \ldots\right]$$

On voit facilement que la fraction $\frac{3}{35330000}$ peut s'écrire $\frac{0.0003}{3533}$, ce qui permet de retrouver l'approximation $\pi \approx \frac{355}{113}(1 - \frac{0.0003}{3533})$ de Ramanujan.

Comme on connait maintenant les autres fractions réduites possibles, on peut écrire une autre formule approchée du même style :

$$\pi \approx \frac{355}{113}\left(1 - \frac{76}{31^6 + 196^3 - 81^2 + 7}\right) = 3.14159265358979323|571$$

qui, même s'il elle fait gagner 3 décimales, est bien moins jolie que l'originale.

3.2 Exemple 2

On va prendre comme équation de départ : $\pi = x + \sqrt{x}$ dont la solution réelle est $x = 1.799964935\ldots$ décomposable en fraction continue régulière [1, 3, 1, 1139, ...] et qui a comme fractions réduites :

$$\left[\frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{10258}{5699}, \ldots\right]$$

en considérant « le grand nombre 1139 »on remplace x par son approximation $\frac{5}{9}$ pour obtenir l'approximation $\pi \approx \frac{9}{5} + \sqrt{\frac{9}{5}}$ qui, le hasard fait bien les choses, a déjà été donnée par Ramanujan.

3.3 Exemple 3

l'équation $x^2 + x + \sqrt{x} = \sqrt{2}\,\pi$ admet comme solution $x = 1.37611408\ldots$ décomposable en fraction continue régulière [1, 2, 1, 1, 1, 13, 2, 2, 30472, ...] et qui a comme fractions réduites :

$$\left[\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{772}{561}, \frac{23524695}{17095018}, \ldots\right]$$

en considérant « le grand nombre 30472 »on remplace x par son approximation $\frac{772}{561}$ pour obtenir l'approximation $\pi \approx \frac{\left(\frac{772}{561}\right)^2 + \frac{772}{561} + \sqrt{\frac{772}{561}}}{\sqrt{2}} = 3.141592653|89\ldots$ qui, a ma connaissance, n'a pas été donnée par Ramanujan.

3.4 Contre-exemple

En regardant les deux approximations équivalentes $\pi \approx \frac{9801}{4412}\sqrt{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{99^2}{1103}$ de Ramanujan, on peut être tenté de décomposer $x = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2.221441469\ldots$ en fraction continue [2, 4, 1, 1, 15, 3, 1, 8, 4, 1, 1, ...] qui doit nous montrer un « grand nombre »..., mais pas cette fois-ci ! Quand même, les fractions réduites devraient contenir la fraction utilisée :

$$\left[\frac{2}{1}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \frac{20}{9}, \frac{311}{140}, \frac{953}{429}, \frac{1264}{569}, \frac{11065}{4981}, \ldots\right]$$

mais ce n'est pas le cas. En fait, cette approximation trouve sont origine dans la série

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n)!^4(396)^{4n}}$$

qui pour $n = 0$ donne $\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\frac{1103}{1}$.

4 Retour sur les fractions continues

4.1 Coéfficients non entier

Si on décompose l'équation $x = \frac{\pi^2}{1+\sqrt{7}} = 2.707152392$ en fraction continue régulière[2, 1, 2, 2, 2, 2, 3, ...] on ne voie pas de « grand nombre »apparaître. Par contre, la suite [..., 1, 2, 2, 2, 2, ...] nous fait penser au développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.

Et si dans le développement en fractions continue, on remplaçait cette suite caractéristique par sa valeur de $\sqrt{2}$? On obtient alors $x = \frac{\pi^2}{1+\sqrt{7}} = 2.707\ldots = [2, \sqrt{2}, -10961, -1, \ldots]$, on voit ainsi apparaître un « grand nombre »qui suggère la possibilité d'une bonne approximation. Les fractions réduites sont :

$$\left[\frac{2}{1}, \frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}, \frac{10961\,(2\sqrt{2}+1)-2}{10961\sqrt{2}-1}, \ldots\right]$$

Si on garde comme valeur approchée $\frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, on peut écrire l'approximation de π :

$$\pi \approx \sqrt{(1+\sqrt{7})\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 3.1415|661\ldots$$

De la même manière, si on part de l'équation $x = \frac{\pi^2}{1+\sqrt{5}} = 3.049875488$ décomposée en fraction continue régulière [3, 20, 20, 35, 3, ...] qui donne les fractions réduites

$$\left[\frac{3}{1}, \frac{61}{20}, \frac{1223}{401}, \ldots\right]$$

on peut écrire directement une approximation de π du style :

$$\pi \approx \sqrt{(1+\sqrt{5})\left(\frac{35^2-2}{20^2+1}\right)} = 3.141592|563\ldots$$

mais on peut aussi décomposer de la manière suivante : [3, $\sqrt{402}$, -119110, …] et écrire l'approximation :

$$\pi \approx \sqrt{(1+\sqrt{5})\left(\frac{3\sqrt{402}+1}{\sqrt{402}}\right)} = 3.1415926|43\ldots$$

qui puisque le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, permet d'écrire finalement :

$$\pi \approx \sqrt{\varphi\left(\frac{6\sqrt{201}+\sqrt{2}}{\sqrt{201}}\right)} = 3.1415926|43\ldots$$

4.2 Fraction continues périodiques

Les racines des équations du second degrés donnent des fractions continues périodique. Par exemple, l'équation $\varphi = n + \frac{1}{\varphi}$ a pour racine positive

$$\varphi = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$$

et se décompose en fraction continue :

$$\varphi = n + \frac{1}{n+\frac{1}{n+\frac{1}{n+\frac{1}{n+\ldots}}}} = [n,\, n,\, n,\, \ldots] = [\overline{n}]$$

en remplaçant φ par sa valeur dans l'équation de départ.

Si dans un développement en fraction continue, on tombe sur une suite de même nombre tel que [… , 3, 3, 3, 3, 3, …], on peut remplacer cette suite par le nombre approximatif $\frac{3+\sqrt{3^2+4}}{2} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

En réalité, la fraction continue [3, 3, 3, 3, 3] à pour fraction réduite $\frac{360}{109}$. L'approximation donnée à ainsi une erreur de 0.0007%, avec des nombres 27 fois moins grand.

De même, si on part de l'équation $\varphi = n + \frac{n}{\varphi}$ qui a pour racine positive $\varphi = \frac{n+\sqrt{n^2+4n}}{2}$, on arrive sur la fraction continue $[n,\, 1,\, n,\, 1,\, \ldots]$, soit $[\overline{n,\, 1}]$.

Par contre, réaliser un catalogue reprennant les différentes combinaisons possible pour toutes les périodes immaginables n'est pas réaliste. Nous allons donc nous orienter vers le recherche de la racine correspondant à une suite périodique quelconque.

4.3 Fraction continue d'une suite périodique

Soit $N = [\overline{a,\, b,\, c,\, d}]$ qui donne la suite de fractions réduites

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{a}{1}, \frac{ab+1}{b}, \frac{A}{B}, \frac{C}{D}\right]$$ [1]

alors :

$$N = \frac{(C-B) + \sqrt{(C-B)^2 + 4\,DA}}{2\,D}$$

qui est facilement utilisable avec des valeurs numériques ou symboliques.

Par exemple, soit $N = [\overline{n}]$, qui donne la suite de fractions réduites

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{n}{1}\right]$$

donc $A = 1$, $B = 0$, $C = n$ et $D = 1$, permet de trouver l'équation : $N = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$ déjà vue précédemment.

Par exemple, soit $N = [\overline{6,\, 5,\, 4,\, 3,\, 2,\, 1}]$, qui donne la suite de fractions réduites

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{6}{1}, \frac{31}{5}, \frac{130}{21}, \frac{421}{68}, \frac{972}{157}, \frac{1393}{225}\right]$$

permet de trouver le nombre $N = \frac{1236+\sqrt{2402496}}{450} = \frac{618+\sqrt{775^2-1}}{225}$.

4.4 Fraction continue d'une suite périodique symétrique

Soit $N = [n, \overline{a,\, b,\, c,\, d,\, c,\, b,\, a,\, 2n}]$. On ne prend que la partie répétitive $[\overline{a,\, b,\, c,\, d,\, c,\, b,\, a,\, 2n}]$ qui donne la suite de fractions réduites :

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{a}{1}, \frac{ab+1}{b}, \ldots, \frac{E}{D}, \frac{B}{C}, \frac{2nB+E}{2nC+D}\right]$$

alors :

$$N = \sqrt{n^2 + \frac{2nC+D}{B}}$$

qui est facilement utilisable avec des valeurs numériques ou symboliques.

---

1. $A = c(ab+1)+a$, $B = cb+1$, $C = d(c(ab+1)+a)+ab+1$ et $D = d(cb+1)+b$.

Par exemple, soit $N = [n, \overline{2,\ 3,\ 2,\ 2n}]$. On ne prend que la partie répétitive $[2,\ 3,\ 2,\ 2n]$ qui donne la suite de fractions réduites :

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{16}{7}, \frac{32n+7}{14n+3}\right]$$

alors :

$$N = \sqrt{n^2 + \frac{14n+3}{16}}$$

5 Exemples complet

5.1 Exemple simple

Soit l'équation $x^2 + x - \frac{\sqrt{3}\pi}{2} = 0$ qui a pour racine positive $x = 1,2235715959...$ Cette racine décomposée en fraction continue régulière donne [1, 4, 2, 8, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 5, 1, 4, ...]. On prend comme partie répétitive la suite qui commence au cinquième terme $[\overline{1,\ 2,\ 2,\ 1}]$. Cette suite donne les fractions réduites :

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}\right]$$

et permet de trouver la valeur du nombre donnant cette suite répétitive :

$$\frac{5+\sqrt{221}}{14}$$

En utilisant la valeur de la suite répétitive, la racine positive x se décompose en la fraction continue régulière $[1,\ 4,\ 2,\ 8,\ \frac{5+\sqrt{221}}{14}]$ qui donne les fractions réduites :

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{11}{9}, \frac{93\,(5+\sqrt{221})+154}{76\,(5+\sqrt{221})+126},\right]$$

qui permet dès lors d'utiliser la formule initiale pour écrire l'approximation :

$$\pi \approx \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{93\,(5+\sqrt{221})+154}{76\,(5+\sqrt{221})+126}\right)^2 + \frac{93\,(5+\sqrt{221})+154}{76\,(5+\sqrt{221})+126}\right) = 3.1415926|7\ldots$$

5.2 Exemple double

Soit l'équation $\pi = \frac{x+\sqrt{3}}{x\sqrt{3}}$ qui a pour racine positive $x = 0,38997873...$ Cette racine décomposée en fraction continue régulière donne $[0,\ 2,\ \sqrt{\pi},\ -6030,\ \ldots]$ qui engendre les fractions réduites :

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}+1}, \ldots\right]$$

En prenant $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}+1}$, on peut écrire l'approximation :

$$\pi \approx \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}+1} + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}+1}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{\pi}+1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=> \pi - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=> \pi\sqrt{\pi} - 1 \approx \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\pi}$$

$$=> \sqrt{\pi}\left(\pi - \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \approx 1$$

$$=> \pi\left(\pi - \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)^2 \approx 1$$

$$=> \pi\left(\pi^2 - 2\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\pi + \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) \approx 1$$

$$=> \pi^3 - 2\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\pi^2 + \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\pi - 1 \approx 0$$

Nous allons transformer cette inéquation en une équation dont une des racines sera une approximation de π.

Donc, soit l'équation $x^3 - 2\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)x^2 + \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 x - 1 = 0$. Nous allons appliquer sur cette équation l'algorithme général de résolution des équations du troisième degré. Soit l'équation générale $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$: les différentes phases de résolutions sont :

1. calculs intermédiaires :
   - $a_0 = d/a = \frac{-1}{1} = -1$;
   - $a_1 = c/a = \frac{\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1} = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$;
   - $a_2 = b/a = \frac{-2\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1} = -2\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
   - $a_3 = a_2/3 = -\frac{2}{3}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
   - $p = a_1 - a_3\,a_2 = -\frac{\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{3}$;
   - $q = a_0 - a_1\,a_3 + 2\,a_3^3 = \frac{2}{27}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - 1$;

2. calcul du discriminant :

$$\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3 = -\frac{\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{27} + \frac{1}{4} = -0.384\ldots < 0$$

3. Comme $\Delta < 0$ il y a alors trois solutions réelles :
   - $x_1 = u\,\cos(t) - a_3$;
   - $x_2 = u\,\cos(t + 2\,\pi/3) - a_3$;
   - $x_3 = u\,\cos(t + 4\,\pi/3) - a_3$;

   avec
   - $u = 2\,(-p/3)^{0.5} = \frac{2}{3}\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
   - $v = \frac{-q/2}{(-p/3)^{\frac{3}{2}}}$;
   - $t = \arccos\frac{v}{3}$.

Comme une des solutions réelles de cette équation est une approximation de π, nous pouvons transformer la solution x_1 en :

$$\pi = u\,x - a_3 = \frac{2}{3}\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,x + \frac{2}{3}\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,(1+x)$$

Cette équation a pour solution $x = 0,828385...$ qui se décompose en fraction continue régulière $[0,\,1,\,4,\,1,\,4,\,1,\,3,\,1,\,1,\,4,\,\ldots]$. On prend comme partie répétitive la suite qui commence au deuxième terme $[\overline{1,\,4}]$. Le nombre donnant cette suite répétitive est $\frac{4+\sqrt{32}}{8} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Nous allons donner à x son approximation $x \approx \frac{2}{1+\sqrt{2}}$, ce qui permet de finalement écrire l'approximation de π :

$$\pi \approx \frac{3}{2}\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,\frac{3+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 3.141|664\ldots$$

5.3 Exemple avec un nombre dérivant de π

Soit $\frac{\pi}{\ln(\pi)} = 2.744396\ldots = \left[1+\sqrt{3},\,3^4,\,7514,\,\ldots\right]$ qui donne les fractions réduites :

$$\left[\frac{1}{0},\,\frac{1+\sqrt{3}}{1},\,\frac{(1+\sqrt{3})\,3^4+1}{3^4},\,\ldots\right]$$

qui permet d'écrire l'approximation :

$$\frac{\pi}{\ln(\pi)} \approx 1+\sqrt{3}+\frac{1}{3^4} \quad \text{ou} \quad e^\pi \approx \pi^{\left(1+\sqrt{3}+\frac{1}{3^4}\right)}$$

6 Quelques approximations résultant de cette méthode

$$\pi \approx \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2 - \frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = 3.141|663\ldots$$

$$\pi \approx \left(\frac{7}{5}\right)^2 + \sqrt{\frac{7}{5}} = 3.14|32\ldots$$

$$\pi \approx \frac{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - \frac{8}{3}}{\sqrt{2}} = 3.14|269\ldots$$

$$\pi \approx \frac{8}{9}\left(\frac{8}{9} + \sqrt{7}\right) = 3.141|90\ldots$$

$$\pi \approx \frac{6}{\sqrt[3]{5} + \frac{1}{5}} = 3.141|400$$

$$\pi \approx \left(\frac{2\sqrt{2} + 1}{2}\right)^2 - \frac{2}{2\sqrt{2} + 1} = 3.141|805\ldots$$

$$\pi \approx \left(\frac{\frac{14}{3} - \sqrt{\frac{14}{3}}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3.141|070\ldots$$

$$\pi \approx \frac{6}{\sqrt{7}\,\sqrt[3]{2}} + \sqrt{\frac{6}{\sqrt{7}\,\sqrt[3]{2}}} = 3.1415|633\ldots$$

$$\pi \approx \frac{\sqrt{15} + \sqrt[3]{14}}{2} = 3.1415|628\ldots$$

$$\pi \approx \left(\frac{77}{50}\right)^2 + \frac{77}{100} = 3.1416$$

$$\pi \approx 2\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}}\right)^2+\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}}\right)=3.14159|806\ldots$$

$$\pi \approx \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{13}+\sqrt[3]{14}}{\sqrt{11}}=3.14159|349\ldots$$

$$\pi \approx \frac{1816}{529}-\frac{529}{1816}=3.1415926|9\ldots$$

$$\pi \approx \left(\frac{20}{9}-\frac{9}{20}\right)^2=3.14|077\ldots$$

$$\pi \approx \sqrt{\frac{329}{33}-\frac{33}{329}}=3.1415|59\ldots$$

$$\pi \approx \sqrt{29}\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\right)=3.141|346\ldots$$

$$\pi \approx 2+\sqrt{\frac{\sqrt{14}-\frac{1}{18}}{\sqrt{8}}}=3.14159265|962\ldots$$

$$\pi \approx \sqrt{\frac{291^2+10^2}{6016}}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=3.141592653|619\ldots$$

$$\pi \approx \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(107^2-17)}{107^2}=3.14159265|238\ldots$$

$$\pi \approx \frac{\sqrt{\frac{10}{3}}\sqrt{\frac{4}{3}}}{\sqrt{\frac{10}{3}}-\sqrt{\frac{4}{3}}}=3.141|662\ldots$$

$$\pi \approx \left(\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{5}{3}}\right)^2-\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{5}{3}}=3.14|616\ldots$$

$$\pi \approx \left(\frac{3\sqrt{43}+1}{2\sqrt{43}+1}\right)^3 + \frac{1}{10^4} = 3.141592|881\ldots$$

$$\pi \approx \sqrt[5]{306 + \frac{1}{\left(\ln \frac{203}{5}\right)^3}} = 3.1415926|48\ldots$$

$$\pi \approx \ln(10691) - \ln(462) = 3.141592653|931\ldots$$

$$\pi \approx \frac{4\ \ln\left(9\,\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{5}}\right)+1}{3\ \ln\left(9\,\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{5}}\right)+1}\,\sqrt{6} = 3.14159265|16499\ldots$$

$$\pi \approx \frac{\sqrt{20}}{\ln\left(\sqrt{18}-\frac{1}{11}\right)} = 3.14159|174\ldots$$

$$\pi \approx \left(\ln\left(3+\sqrt[3]{24}\right)\right)^2 = 3.141|123\ldots$$

$$\pi \approx 2 + \sqrt{1+\frac{1}{3\ \ln(3)}} = 3.141|671\ldots$$

$$\pi \approx 1 + \frac{\ln(5)-\frac{1}{8}}{\ln(2)} = 3.14159|121\ldots$$

$$\pi \approx \sqrt[9]{10\,e^8} = 3.14159|828\ldots$$

$$\pi \approx e\,\left(\sqrt[3]{1+\frac{1001}{111}}-1\right) = 3.14159|406\ldots$$

$$\pi \approx e^{\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)} = 3.1415|435\ldots$$

$$\pi \approx \frac{\left(\frac{772}{561}\right)^2 + \frac{772}{561} + \sqrt{\frac{772}{561}}}{\sqrt{2}} = 3.141592653|89\ldots$$

$$\pi \approx \frac{333}{106}\left(1 + \frac{1}{e^{\sqrt{111}} + 116}\right) = 3.1415926535|370\ldots$$

$$\pi \approx \frac{355}{113}\left(1 - \frac{3\,\varphi}{35329998\,\varphi + 3}\right) = 3.1415926535897932|26944$$

$$\pi \approx \varphi\left(\ln(7) - \left(\frac{20}{123}\right)^3\right) = 3.141592|717\ldots$$

$$\pi \approx \sqrt[3]{\varphi\,\frac{97^2}{22^2+7}} = 3.1415926|5\ldots$$

$$avec\ \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

7 Conclusion

La méthode présentée n'est évidemment pas la seule, est certainement incomplète, mais permet de jouer quelque temps avec les approximations numériques de π sans devoir être un mathématicien accompli.

Ah oui, au fait, dans l'introduction j'avais honteusement tronqué la citation de Monsieur J.P. Delahaye, la voici intégralement : "..., dont on se demande si elle ne résulte pas seulement d'un jeu (mais qui peut jouer à de tels jeux ?)."

Je crois que dans la catégorie amateur, avec une calculatrice et/ou un ordinateur, tous le monde peut jouer, ce dont, j'en suis sûr, Monsieur Delahaye, malgré sa petite phrase interrogative, ne doutais pas un instant.