Famille du nombre d'or - Fraction continue - Triangle de φ - Escalier de φ

Benoit De Coninck

20 juin 2019

1 Introduction

Le but de ce document est de montrer qu'à partir de la seule valeur n caractéristique d'un élément de la famille du nombre d'or, il est possible de déterminer les coefficients des termes de puissance de n des fractions continues correspondantes. Ces coefficients se placent dans un schéma en triangle (puissances impaires) puis en escalier (puissances entières). Une relation entre le triangle de Pascal et le schéma en escalier est finalement établie.

2 Famille du nombre d'or

Le nombre d'or, φ est la racine positive de l'équation $\varphi^2 = \varphi + 1$, soit $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La famille du nombre d'or est constituée par les racines positives solutions de l'équation $(\varphi_n)^2 = n \times \varphi_n + 1$, soit $\varphi_n = \dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$.

La spécificité de la famille du nombre d'or est de présenter un développement en fraction continue particulièrement simple. En effet,

$$\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2} = n + \cfrac{1}{n+\frac{1}{n+\frac{1}{n+\dots}}} = (n + 1/(n + 1/(n + 1/(n + \dots))))$$

soit en format abrégé : $\varphi_n = [n,\, n,\, n,\, n,\, \dots] = [\overline{n}]$.

3 Puissances de la famille du nombre d'or

Une simple application de cette formule permet d'établir le tableau des valeurs numériques des développements en fraction continue de quelques puissances de φ_n :

n	puissance				
	1	2	3	4	5
1	$[\overline{1}]$	$[2, \overline{1, 1}]$	$[\overline{4}]$	$[6, \overline{1, 5}]$	$[\overline{11}]$
2	$[\overline{2}]$	$[5, \overline{1, 4}]$	$[\overline{14}]$	$[33, \overline{1, 32}]$	$[\overline{82}]$
3	$[\overline{3}]$	$[10, \overline{1, 9}]$	$[\overline{36}]$	$[118, \overline{1, 117}]$	$[\overline{393}]$
4	$[\overline{4}]$	$[17, \overline{1, 16}]$	$[\overline{76}]$	$[321, \overline{1, 320}]$	$[\overline{1364}]$
5	$[\overline{5}]$	$[26, \overline{1, 25}]$	$[\overline{140}]$	$[726, \overline{1, 725}]$	$[\overline{3775}]$

Ce tableau permet de généraliser le développement en fraction continue des puissances de la famille du nombre d'or :

$$
\begin{array}{lcccl}
(\varphi_n) & = & \varphi_n & = & [\overline{n}] \\
(\varphi_n)^2 & = & n \times \varphi_n + 1 & = & [n^2+1, \overline{1, n^2}] \\
(\varphi_n)^3 & = & (n^2+1) \times \varphi_n + n & = & [\overline{n^3+3n}] \\
(\varphi_n)^4 & = & (n^3+2n) \times \varphi_n + n^2 + 1 & = & [n^4+4n^2+1, \overline{1, n^4+4n^2}] \\
(\varphi_n)^5 & = & (n^4+3n^2+1) \times \varphi_n + n^3 + 2n & = & [\overline{n^5+5(n^3+n)}]
\end{array}
$$

3.1 Relation entre multiple de puissances

3.1.1 Puissance impaire vers son double

Pour passer du développement en fraction continue de la puissance 1 vers la puissance 2, il faut passer de n à n^2 au niveau des coefficients des fractions continues. Cette relation est applicable pour toute puissance impaire vers son double ($(\varphi_n)^{2k+1}$ à $(\varphi_n)^{4k+2}$).

Par exemple, pour passer de $(\varphi_n)^3$ à $(\varphi_n)^6$, on pose $m = n^3 + 3n$ et leurs développements en fractions continues s'écrivent :

$$
\begin{array}{lcl}
(\varphi_n)^3 & = & [\overline{m}] \\
(\varphi_n)^6 & = & [m^2+1, \overline{1, m^2}]
\end{array}
$$

En remplaçant m^2 par sa valeur $(n^3 + 3n)^2 = n^6 + 6n^4 + 9n^2$, nous obtenons :

$$(\varphi_n)^6 = [n^6 + 6n^4 + 9n^2 + 1, \overline{1, n^6 + 6n^4 + 9n^2}]$$

relation confirmée numériquement :

- $n = 1$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 = [17,\ \overline{1,\ 16}]$ et $1^6 + 6 \times 1^4 + 9 \times 1^2 = 16$;
- $n = 2$, $\left(\dfrac{2+\sqrt{8}}{2}\right)^6 = [197,\ \overline{1,\ 196}]$ et $2^6 + 6 \times 2^4 + 9 \times 2^2 = 196$;
- ...

3.1.2 Puissance paire vers son double

Pour passer du développement en fraction continue de la puissance 2 vers la puissance 4, il faut passer de n^2 à $n^4 + 4n^2$ au niveau des coefficients des fractions continues. Cette relation est applicable pour toute puissance paire vers son double ($(\varphi_n)^{2k}$ à $(\varphi_n)^{4k}$).

Par exemple, pour passer de $(\varphi_n)^4$ à $(\varphi_n)^8$, on pose $m^2 = n^4 + 4n^2$ et leurs développements en fractions continues s'écrivent :

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_n)^4 & = & [m^2+1,\ \overline{1,\ m^2}] \\ (\varphi_n)^8 & = & [m^4+4m^2+1,\ \overline{1,\ m^4+4m^2}] \end{array}$$

Le passage de m^2 vers $m^4 + 4m^2 = (m^2)^2 + 4m^2$ en remplaçant m^2 par sa valeur donne :

$$m^4 + 4m^2 = (n^4 + 4n^2)^2 + 4(n^4 + 4n^2) = n^8 + 8n^6 + 20n^4 + 16n^2$$

et donc

$$(\varphi_n)^8 = [n^8 + 8n^6 + 20n^4 + 16n^2 + 1,\ \overline{1,\ n^8 + 8n^6 + 20n^4 + 16n^2}]$$

En appliquant cette dernière relation, le calcul confirme effectivement que :

- $n = 1$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 = [46,\ \overline{1,\ 45}]$ et $1^8 + 8 \times 1^6 + 20 \times 1^4 + 16 \times 1^2 = 45$;
- $n = 2$, $\left(\dfrac{2+\sqrt{8}}{2}\right)^8 = [1153,\ \overline{1,\ 1152}]$ et $2^8 + 16 \times 2^6 + 20 \times 2^4 + 16 \times 2^2 = 1152$;
- ...

3.1.3 Puissance impaire vers son triple

Pour passer du développement en fraction continue de la puissance 1 vers la puissance 3, de (φ_n) à $(\varphi_n)^3$, il faut passer de n à $n^3 + 3n$ au niveau des coefficients des fractions continues. Cette relation est applicable pour toute puissance impaire vers son triple ($(\varphi_n)^{2k+1}$ à $(\varphi_n)^{6k+3}$).

Par exemple, pour passer de $(\varphi_n)^3$ à $(\varphi_n)^9$, on pose $m = n^3 + 3n$ et leurs développements en fractions continues s'écrivent :

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_n)^3 & = & [\overline{m}] \\ (\varphi_n)^9 & = & [\overline{m^3 + 3m}] \end{array}$$

En remplaçant m par sa valeur :

$$(m^3 + 3m) = (n^3 + 3n)^3 + 3(n^3 + 3n) = n^9 + 9n^7 + 27n^5 + 30n^3 + 9n$$

et donc

$$(\varphi_n)^9 = [\overline{n^9 + 9n^7 + 27n^5 + 30n^3 + 9n}]$$

En appliquant cette dernière relation, le calcul confirme effectivement que :

- $n = 1$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^9 = [\overline{76}]$ et $1^9 + 9 \times 1^7 + 27 \times 1^5 + 30 \times 1^3 + 9 \times 1 = 76$;
- $n = 2$, $\left(\dfrac{2+\sqrt{8}}{2}\right)^9 = [\overline{2786}]$ et $2^9 + 9 \times 2^7 + 27 \times 2^5 + 30 \times 2^3 + 9 \times 2 = 2786$;
- ...

3.2 Généralisation

Du point précédent, en ce qui concerne les puissances de la famille du nombre d'or, nous avons constaté qu'il est possible de passer :

- d'une puissance impaire vers son double en appliquant $m = n^2$;
- d'une puissance paire vers son double en appliquant $m^2 = n^4 + 4n^2$;
- d'une puissance impaire vers son triple en appliquant $m = n^3 + 3n$;
- par généralisation de la méthode, d'une puissance impaire vers son quintuple en appliquant $m = n^5 + 5(n^3 + n)$;
- ... ;

Nous constatons qu'avec les deux possibilités pour doubler la valeur de la puissance et qu'avec toutes les puissances par un nombre premier, il est possible de déterminer le développement en fraction continue de n'importe qu'elle puissance de φ_n sur base de la seule connaissance de n.

3.3 Quelques puissances premières de φ_n

En se basant sur une analyse de valeurs numériques, le développement en fraction continue des puissances premières de la famille du nombre d'or débutent par :

$$
\begin{array}{lll}
(\varphi_n)^3 & = & [\overline{n^3+3n}] \\
(\varphi_n)^5 & = & [\overline{n^5+5(n^3+n)}] \\
(\varphi_n)^7 & = & [\overline{n^7+7(n^5+2n^3+n)}] \\
(\varphi_n)^{11} & = & [\overline{n^{11}+11(n^9+4n^7+7n^5+5n^3+n)}] \\
(\varphi_n)^{13} & = & [\overline{n^{13}+13(n^{11}+5n^9+12n^7+14n^5+7n^3+n)}] \\
(\varphi_n)^{17} & = & [\overline{n^{17}+17(n^{15}+7n^{13}+26n^{11}+55n^9+66n^7+42n^5+12n^3+n)}] \\
(\varphi_n)^{19} & = & [\overline{n^{19}+19(n^{17}+8n^{15}+35n^{13}+91n^{11}+143n^9+132n^7} \\
 & & \overline{+66n^5+15n^3+n)}] \\
(\varphi_n)^{23} & = & [\overline{n^{23}+23(n^{21}+10n^{19}+57n^{17}+204n^{15}+476n^{13}} \\
 & & \overline{+728n^{11}+715n^9+429n^7+143n^5+22n^3+n)}]
\end{array}
$$

Ces premières valeurs permettent de dégager une certaine uniformité entre les différentes puissance premières de φ_n supérieure à 2. Celles-ci se présentent sous la forme :

$$(\varphi_n)^k = [\overline{n^k + k\ (n^{k-2} + \ldots + n)}] \quad \text{avec } k \text{ nombre premier} > 2$$

qui a pour particularité que tous les coefficients des puissances de n sont des entiers.

3.4 Quelques puissances impaires de φ_n

La détermination des développements en fraction continue des puissances impaires non première découle directement des règles établissant les relations entre deux puissances. Quelques puissances impaires non premières ont été déterminées de cette manière :

$$
\begin{array}{lll}
(\varphi_n)^9 & = & [\overline{n^9+9(n^7+3n^5+\frac{10}{3}n^3+n)}] \\
(\varphi_n)^{15} & = & [\overline{n^{15}+15(n^{13}+6n^{11}+\frac{55}{3}n^9+30n^7+\frac{126}{5}n^5+\frac{28}{3}n^3+n)}] \\
(\varphi_n)^{21} & = & [\overline{n^{21}+21(n^{19}+9n^{17}+\frac{136}{3}n^{15}+140n^{13}+273n^{11}+\frac{1001}{3}n^9} \\
 & & \overline{+\frac{1716}{7}n^7+99n^5+\frac{55}{3}n^3+n}] \\
(\varphi_n)^{25} & = & [\overline{n^{25}+25(n^{23}+11n^{21}+70n^{19}+285n^{17}+\frac{3876}{5}n^{15}+1428n^{13}} \\
 & & \overline{+1768n^{11}+1430n^9+715n^7+\frac{1001}{5}n^5+26n^3+n}] \\
 & & \ldots
\end{array}
$$

Une mise en évidence de type :

$$(\varphi_n)^k = [\overline{n^k + k\ (n^{k-2} + \ldots + n)}]$$

est possible en admettant que les coefficients des puissances de n ne sont plus exclusivement des entiers, mais également des rationnels.

4 Relations entre les coefficients des puissances impaires

4.1 Relations par rapport à k

Des constatations réalisées sur les puissances impaires de φ_n c'est sous la forme $(\varphi_n)^k = [\overline{n^k + k\ (n^{k-2} + \ldots + n)}]$ qu'une analyse des relations entre les coefficients des puissances impaires de φ_n est entreprise.

La relation entre les coefficients de n^k, n^{k-2} et de n est simple puisqu'ils sont tous égaux à 1.

Pour les autres puissances de n, le tableau suivant reprend quelques coefficients de n^{k-m} avec $k-4 >= m >= 2$.

	Coefficients					
k	n^{k-4}	n^{k-6}	n^{k-8}	n^{k-10}	n^{k-12}	n^{k-14}
5	1					
7	2	1				
9	3	$3+\frac{1}{3}$	1			
11	4	7	5	1		
13	5	12	14	7	1	
15	6	$18+\frac{1}{3}$	30	$25+\frac{1}{5}$	$9+\frac{1}{3}$	1
17	7	26	55	66	42	12
19	8	35	91	143	132	66
21	9	$45+\frac{1}{3}$	140	273	$333+\frac{2}{3}$	$245+\frac{1}{7}$
23	10	57	204	476	728	715
25	11	70	285	$775+\frac{1}{5}$	1428	1768
27	12	$84+\frac{1}{3}$	385	1197	2584	3876
29	13	100	506	1771	4389	7752

Ce tableau permet de déterminer les équations qui donnent les coefficients des différentes colonnes en fonction de k :

$$\begin{array}{lcl}
n^{k-4} & : & \frac{k-3}{2} \\
n^{k-6} & : & \frac{(k-4)(k-5)}{6} \\
n^{k-8} & : & \frac{(k-5)(k-6)(k-7)}{24} \\
n^{k-10} & : & \frac{(k-6)(k-7)(k-8)(k-9)}{120} \\
n^{k-12} & : & \frac{(k-7)(k-8)(k-9)(k-10)(k-11)}{720} \\
n^{k-14} & : & \frac{(k-8)(k-9)(k-10)(k-11)(k-12)(k-13)}{5040}
\end{array}$$

qui présentent une séquence logique : l'équation suivante est obtenue :

– pour le numérateur en supprimant le premier terme en (k-...), en rajoutant 2 termes en (k-...) : par exemple de $(k-5)(k-6)(k-7)$ à $(k-6)(k-7)(k-8)(k-9)$;
– pour le dénominateur en multipliant par l'entier suivant, ce qui donne la suite de dénominateurs : 2, $2 \times 3 = 6$, $6 \times 4 = 24$, $24 \times 5 = 120$, ...

Les coefficients des colonnes suivantes seront données par :

$$\begin{array}{lcl} n^{k-16} & : & \frac{(k-9)(k-10)(k-11)(k-12)(k-13)(k-14)(k-15)}{40320} \\ n^{k-18} & : & \frac{(k-10)(k-11)(k-12)(k-13)(k-14)(k-15)(k-16)(k-17)}{362880} \\ n^{k-20} & : & \frac{(k-11)(k-12)(k-13)(k-14)(k-15)(k-16)(k-17)(k-18)(k-19)}{3628800} \end{array}$$

A partir de ces constatations, une écriture sous forme de factoriels est établie. Si coef_m^k est le coefficient de n^{k-m}, alors :

$$\text{coef}_m^k = \frac{\left(k - \frac{m+2}{2}\right)!}{(k-m)!\ \left(\frac{m}{2}\right)!}$$

pour tous les entiers impairs $k \geq 3$ et tous les entiers pairs $m \geq 2$.

Le tableau des puissances impaires peut donc être systématiquement replis et par conséquent les valeurs pour les nombres premiers > 2 parfaitement déterminés sans passer par une analyse numérique.

4.2 Triangle impair de φ_n

En reprenant les colonnes depuis n^{k-2}, les coefficients se placent sous la forme du *triangle impair de* φ_n :

Nc		0	1	2	3	4	5
	Coefficients en n^{k-m}						
k	n^{k-2}	n^{k-4}	n^{k-6}	n^{k-8}	n^{k-10}	n^{k-12}	n^{k-14}
1							
3	1						
5	1	1					
7	1	2	1				
9	1	3	$3+\frac{1}{3}$	1			
11	1	4	7	5	1		
13	1	5	12	14	7	1	
15	1	6	$18+\frac{1}{3}$	30	$25+\frac{1}{5}$	$9+\frac{1}{3}$	1
17	1	7	26	55	66	42	12
19	1	8	35	91	143	132	66
21	1	9	$45+\frac{1}{3}$	140	273	$333+\frac{2}{3}$	$245+\frac{1}{7}$

Pour la colonne n^{k-2}, tous les coefficients sont égaux à 1. De même pour les coefficients qui forment la première diagonale non vide des colonnes sont tous égaux à 1. La ligne Nc est le numéro de colonne qui démarre à 0 pour la colonne n^{k-4}.

Pour la colonne n^{k-4}, les coefficients sont :
- ligne $k = 7$, $\text{coef}_7^3 = \text{coef}_5^5 + \text{coef}_5^3 : 2 = 1 + 1$;
- ligne $k = 9$, $\text{coef}_9^5 = \text{coef}_7^7 + \text{coef}_7^5 : 3 = 1 + 2$;
- ligne $k = 11$, $\text{coef}_{11}^7 = \text{coef}_9^9 + \text{coef}_9^7 : 4 = 1 + 3$;
- ...

Pour la colonne n^{k-6}, les coefficients sont :
- ligne $k = 9$, $\text{coef}_9^3 = \text{coef}_7^5 + \text{coef}_7^3 \times \left(1 + \frac{\text{NC}}{3}\right) : (3 + \frac{1}{3}) = 2 + 1(1 + \frac{1}{3})$;
- ligne $k = 11$, $\text{coef}_{11}^5 = \text{coef}_9^7 + \text{coef}_9^5 \times \left(1 + \frac{\text{NC}}{5}\right) : 7 = 3 + (3 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{5})$;
- ligne $k = 13$, $\text{coef}_{13}^7 = \text{coef}_{11}^9 + \text{coef}_{11}^7 \times \left(1 + \frac{\text{NC}}{7}\right) : 12 = 4 + 7(1 + \frac{1}{7})$;
- ...

Pour la colonne n^{k-8}, les coefficients sont :
- ligne $k = 11$, $\text{coef}_{11}^3 = \text{coef}_9^5 + \text{coef}_9^3 \times \left(1 + \frac{\text{NC}}{3}\right) : 5 = (3 + \frac{1}{3}) + 1(1 + \frac{2}{3})$;
- ligne $k = 13$, $\text{coef}_{13}^5 = \text{coef}_{11}^7 + \text{coef}_{11}^5 \times \left(1 + \frac{\text{NC}}{5}\right) : 14 = 7 + 5(1 + \frac{2}{5})$;
- ligne $k = 15$, $\text{coef}_{15}^7 = \text{coef}_{13}^9 + \text{coef}_{13}^7 \times \left(1 + \frac{\text{NC}}{7}\right) : 30 = 12 + 14(1 + \frac{2}{7})$;
- ...

soit, d'une façon générale :

$$\text{coef}_k^{k-m} = \text{coef}_{k-2}^{k-(m-2)} + \text{coef}_{k-2}^{k-m} \times \left(1 + \frac{\frac{m-4}{2}}{k-m}\right) \quad \text{pour } m \geq 4 \text{ et } k > m$$

qui est la relation générale pour écrire le triangle impair de φ_n.

5 Ajout des coefficients des puissances paires

5.1 Relations par rapport à k

Le tableau des coefficients des puissances paires est facile à réaliser en utilisant le tableau des puissances impaires et les deux relations pour passer d'une puissances impaire ou paire vers sont double. Cette détermination met rapidement en évidence que ces coefficients peuvent également être présentés sous la forme :

$$(\varphi_n)^k = \overline{[n^k + k\ (n^{k-2} + \ldots + \text{coef}_k^2\ n^2)]}$$

La relation entre les coefficients de n^k et n^{k-2} est simple puisqu'ils sont tous égaux à 1. Par contre les coefficients de n^2 sont différents de 1 et varient en fonction de la puissance paire k :

k	Coefficients					
	n^{k-4}	n^{k-6}	n^{k-8}	n^{k-10}	n^{k-12}	n^{k-14}
6	$1+\frac{1}{2}$					
8	$2+\frac{1}{2}$	2				
10	$3+\frac{1}{2}$	5	$2+\frac{1}{2}$			
12	$4+\frac{1}{2}$	$9+\frac{1}{3}$	$8+\frac{3}{4}$	3		
14	$5+\frac{1}{2}$	15	21	14	$3+\frac{1}{2}$	
16	$6+\frac{1}{2}$	22	$41+\frac{1}{4}$	42	21	4
18	$7+\frac{1}{2}$	$30+\frac{1}{3}$	$71+\frac{1}{2}$	99	77	30
20	$8+\frac{1}{2}$	40	$113+\frac{3}{4}$	$200+\frac{1}{5}$	$214+\frac{1}{2}$	132

Les coefficients de ce tableau s'obtiennent avec les mêmes équations que les coefficients du tableau des puissances impaires :

$$\begin{array}{ll} n^{k-4} & : \frac{k-3}{2} \\ n^{k-6} & : \frac{(k-4)(k-5)}{6} \\ n^{k-8} & : \frac{(k-5)(k-6)(k-7)}{24} \\ n^{k-10} & : \frac{(k-6)(k-7)(k-8)(k-9)}{120} \\ \ldots & \end{array}$$

Mis sous les formes similaires $(\varphi_n)^k = [\overline{n^k + k\ (n^{k-2} + \ldots + n)}]$ pour les puissances impaires et $(\varphi_n)^k = [\overline{n^k + k\ (n^{k-2} + \ldots + \text{coef}_k^2\ n^2)}]$ pour les puissances paires, les coefficients des puissances en n^{k-m} s'obtiennent à l'aide des mêmes formules.

5.2 L'escalier de φ_n

Il est donc possible de rassembler les puissances impaires et paires de φ_n dans une même tableau en utilisant les mêmes équations de détermination des coefficients. Les puissances en $k = 2p$ et en $k = 2p - 1$ comportent le même nombre de coefficients. Les lignes du tableau on le même nombre de coefficients deux par deux et forment donc *l'escalier de* φ_n :

	Coefficients en n^{k-m}						
k	n^{k-2}	n^{k-4}	n^{k-6}	n^{k-8}	n^{k-10}	n^{k-12}	n^{k-14}
3	1						
4	1						
5	1	1					
6	1	$1+\frac{1}{2}$					
7	1	2	1				
8	1	$2+\frac{1}{2}$	2				
9	1	3	$3+\frac{1}{3}$	1			
10	1	$3+\frac{1}{2}$	5	$2+\frac{1}{2}$			
11	1	4	7	5	1		
12	1	$4+\frac{1}{2}$	$9+\frac{1}{3}$	$8+\frac{3}{4}$	3		
13	1	5	12	14	7	1	
14	1	$5+\frac{1}{2}$	15	21	14	$3+\frac{1}{2}$	
15	1	6	$18+\frac{1}{3}$	30	$25+\frac{1}{5}$	$9+\frac{1}{3}$	1
16	1	$6+\frac{1}{2}$	22	$41+\frac{1}{4}$	42	21	4
17	1	7	26	55	66	42	12
18	1	$7+\frac{1}{2}$	$30+\frac{1}{3}$	$71+\frac{1}{2}$	99	77	30
19	1	8	35	91	143	132	66
20	1	$8+\frac{1}{2}$	40	$113+\frac{3}{4}$	$200+\frac{1}{5}$	$214+\frac{1}{2}$	132

En imposant que tous les coefficients des puissances de n^{k-2} sont égaux à 1 et que le dernier coefficient des puissances impaires est égal à 1, alors :

$$\mathrm{coef}_k^{k-m} = \mathrm{coef}_{k-1}^{k-m} + \mathrm{coef}_{k-2}^{k-(m-2)} \times \frac{m-2}{m} \quad \text{pour } m \geq 4 \text{ et } k > m$$

est la relation entre les coefficients de l'escalier de φ_n.

La détermination directe des coefficients est possible en appliquant la formule :

$$\mathrm{coef}_m^k = \frac{\left(k - \frac{m+2}{2}\right)!}{(k-m)!\ \left(\frac{m}{2}\right)!}$$

pour tous les entiers $k \geq 3$ et tous les entiers pairs $m \geq 2$.

6 Relation entre le triangle de Pascal et l'escalier de φ_n

Classiquement, le triangle de Pascal a la forme :

	rang (p)									
Puissance (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

En partant de la puissance 2, si on divise chaque coefficient par la valeur de la puissance et que l'on ne garde que les valeurs ≥ 1, nous obtenons le triangle de Pascal *normalisé* :

	rang (p)									
Puissance (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2		1								
3		1	1							
4		1	$1+\frac{1}{2}$	1						
5		1	2	2	1					
6		1	$2+\frac{1}{2}$	$3+\frac{1}{3}$	$2+\frac{1}{2}$	1				
7		1	3	5	5	3	1			
8		1	$3+\frac{1}{2}$	7	$8+\frac{3}{4}$	7	$3+\frac{1}{2}$	1		
9		1	4	$9+\frac{1}{3}$	14	14	$9+\frac{1}{3}$	4	1	

En comparant l'escalier de φ_n et le triangle de Pascal *normalisé*, on remarque qu'il y a respectivement correspondance entre les colonnes :

- n^{k-2} et la colonne de rang 1 ;
- n^{k-4} et la colonne de rang 2 ;
- n^{k-6} et la colonne de rang 3 ;
- n^{k-m} et la colonne de rang $m/2$;

La grosse différence entre les deux tableaux est le décalage vers le bas de l'escalier de φ_n qui de ce fait ne présente pas la symétrie existante dans le triangle de Pascal.

Une autre manière d'exprimer cette relation est de constater qu'une ligne du triangle de Pascal normalisé correspond à une diagonale de l'escalier de φ_n.

7 Conclusions

La recherche d'une formule donnant les coefficients des développements en fraction continue pour les puissances première à débouché sur une formule valable pour toutes les puissances entières :

$$\mathrm{coef}_m^k = \frac{\left(k - \frac{m+2}{2}\right)!}{(k-m)!\ \left(\frac{m}{2}\right)!}$$

pour tous les entiers $k \geq 3$ et tous les entiers pairs $m \geq 2$.

Les puissances premières comportent la particularité de ne contenir que des coefficients entiers (condition nécessaire (et suffisante ?)). La mise en évidence conservant des coefficients entier peut se poursuivre dans le cas des puissances premières en passant de la formule générale :

$$(\varphi_n)^k = [\overline{n^k + k\ (n^{k-2} + \ldots + n)}]$$

à la formule applicable pour les puissances premières :

$$(\varphi_n)^k = [\overline{n^k + kn(n^2+1)(n^{k-5} + \ldots + 1)}]$$

et même à

$$(\varphi_n)^k = [\overline{n^k + kn(n^2+1)^2(n^{k-7} + \ldots + 1)}]$$

Lorsque $k =$ nombre premier $+2$, comme c'est le cas entre 5 et 7 ou 41 et 43.

Annexe - Relation amusante pour $(\varphi_n)^{2k}$

Sur base des coefficients de la fraction continue $[n^2+1,\ \overline{1,\ n^2}]$, les fractions réduites de $(\varphi_n)^2$ sont :

$$\left[\frac{1}{0}, \frac{n^2+1}{1}, \frac{n^2+2}{1}, \frac{n^2(n^2+2)+n^2+1}{n^2+1}\right]$$

lorsqu'on utilise les 3 premiers termes $[n^2+1,\ 1,\ n^2]$. La prise en compte du terme suivant 1 donne la fraction réduite :

$$\frac{n^2(n^2+2)+(n^2+1)+(n^2+2)}{n^2+1+1} = \frac{(n^2+1)(n^2+2)+(n^2+1)}{n^2+2}$$

$$= \frac{(n^2+3)(n^2+1)}{n^2+2}$$

Le numérateur de cette dernière fraction est intéressant si l'on fait le rapprochement avec les termes du développement en fraction continue de $(\varphi_n)^4$: $[n^4 + 4n^2 + 1, \overline{1,\, n^4 + 4n^2}]$. On constate en effet que :

$$(n^2 + 3)(n^2 + 1) = n^4 + 4n^2 + 3$$

Si, pour le développement en fraction continue de $(\varphi_n)^4$ on pose $m^2 = n^4 + 4n^2$, nous pouvons écrire que

$$(\varphi_n)^4 = [m^2 + 1, \overline{1,\, m^2}]$$

qui donne la fraction réduite

$$\frac{(m^2 + 3)(m^2 + 1)}{m^2 + 2}$$

nous remarquons alors que le choix de la valeur de m implique que

$$(n^2 + 3)(n^2 + 1) = m^2 + 3$$

qui donne une suite logique entre les puissances 2 et 4 et par extension entre les puissances 2^k et 2^{k+1}.

Cette écriture permet d'obtenir de façon mécanique des approximations des puissances en 2^k de φ_n.

Par exemple :

- pour n = 1, nous avons :
  - $\varphi^2 \approx \dfrac{(1 + 3) \times (1 + 1)}{1 + 2} = \dfrac{4 \times 2}{3} = \dfrac{8}{3}$;
  - $\varphi^4 \approx \dfrac{8 \times 6}{7} = \dfrac{48}{7}$;
  - $\varphi^8 \approx \dfrac{48 \times 46}{47} = \dfrac{2208}{47}$;
  - ...

  qui conduit à des approximations de plus en plus précise de φ :
  - $\varphi \approx \sqrt{\dfrac{8}{3}} = 1.6||32$;
  - $\varphi \approx \sqrt[4]{\dfrac{48}{7}} = 1.618||21$;
  - $\varphi \approx \sqrt[8]{\dfrac{2208}{47}} = 1.61803||40$;
  - ...
- pour n = 8 ($\varphi_8 = 4 + \sqrt{17}$), nous avons :
  - $(\varphi_8)^2 \approx \dfrac{(64 + 3) \times (64 + 1)}{64 + 2} = \dfrac{67 \times 65}{66} = \dfrac{4355}{66}$;

- $(\varphi_8)^4 \approx \dfrac{4355 \times 4353}{4354} = \dfrac{18957315}{4354}$;
- $(\varphi_8)^8 \approx \dfrac{18957315 \times 18957313}{18957314} = \dfrac{359379754094595}{18957314}$;
- ...

qui conduit à des approximations de plus en plus précise de φ_8 :
- $\varphi_8 \approx \sqrt{\dfrac{4355}{66}} = 8.123105||83$;
- $\varphi_8 \approx \sqrt[4]{\dfrac{18957315}{4354}} = 8.12310562561766||62$;
- $\varphi_8 \approx \sqrt[8]{\dfrac{359379754094595}{18957314}} = 8.1231056256176605498214098559||81$;
- ...