# Exposé élémentaire de la théorie d'Einstein et de sa généralisation

Jean Becquerel
Professeur au muséum d'histoire naturelle

1922

# M. Jean BECQUEREL

M. Jean BECQUEREL appartient à une famille de physiciens : fils d'Henri Becquerel, l'illustre auteur de la découverte de la radioactivité, petit-fils d'Edmond Becquerel et de Jamin, arrière-petit-fils d'Antoine-César Becquerel, il est né à Paris le 5 février 1878. il sortit de l'Ecole Polytechnique en 1899 dans 1e corps des Ponts et Chaussées, où il a actuellement le grade d'ingénieur en chef.

En juillet 1903 il fut nommé assistant, puis en 1909 professeur au Muséum National d'Histoire Naturelle, titulaire de la chaire de Physique dans laquelle quatre Becquerel se sont succédé de père en fils depuis sa fondation (1838). Répétiteur de physique à l'Ecole Polytechnique (1911), il a rempli à cette Ecole les fonctions d'examinateur temporaire (1919-1920) , et de professeur temporaire (1920-1921). Il est lauréat de l'Académie des Sciences (prix Rivot, prix Hughes).

M. Jean BECQUEREL, soit seul, soit. en collaboration avec le professeur Kamerlingh-Onne (de Leyde) ou avec M. Louis Matout, assistant au Muséum, a effectué de nombreuses recherches sur l'absorption de la lumière, les phénomènes optiques et magnéto-optiques aux très basses températures, 1a phosphorescence, les phénomènes galvano-magnétiques. Il a publié ses travaux dans les comptes rendus de l'Ac. des Sc., les C.R. de l'Ac. des Sc. d'Amsterdam (en collaboration avec c le Prof. Kamerlingh-Onnes), le bulletin du Muséum, les Ann. De Ch. Et de Phys., le Radium, etc. . .

Depuis quelques années, il s'est principalement consacré à l'étude de la théorie d'Einstein ; jugeant nécessaire de défendre et de propager les idées nouvelles, il expose cette théorie à son cours du Muséum.

# Introduction

Presque tout le monde a entendu parler de la révolution qui, depuis quelques années, a bouleversé les notions fondamentales sur lesquelles reposaient la mécanique et la physique. Je me suis efforcé, dans ce petit livre, d'exposer les grands traits de la nouvelle théorie avec le minimum de calculs, presque sans calculs, en admettant seulement que le lecteur possède les notions les plus élémentaires de géométrie et d'algèbre. J'ai fait suivre cet exposé d'un appendice où les personnes familiarisées avec le calcul différentiel trouveront une sorte de précis de la théorie mathématique.

En 1905, un jeune physicien de génie, ALBERT EINSTEIN, pour expliquer l'echec de toutes les tentatives destinées à mettre en évidence le mouvement absolu de la terre dans l'espace, a eu l'audace d'abandonner les idées basées sur les apparences les plus familières. Il a développé sa théorie en deux grandes étapes : la relativité restreinte au mouvement en ligne droite avec vitesse constante, et depuis 1912 la relativité généralisée. S'étant élevé au dessus de Copernic, de Galilée, et de Newton, Einstein a découvert la véritable loi de la gravitation, qui contient en elle les principes généraux de la mécanique, et a été conduit a une impressionnante conception de l'univers.

On s'imagine à priori que « l'espace » dans lequel on observe la matière et dans lequel on mesure des distances est quelque chose d'absolu. On croit aussi que « le temps » est universel et absolu, que la simultanéité de deux événements a un sens bien défini ; on ne voit aucun lien entre l'espace et le temps, qui apparaissent comme deux individualités bien séparées. Ces notions doivent être abandonnées aujourd'hui. L'espace et le temps ne sont ni absolus ni indépendants : ils sont unis et forment un Univers à quatre dimensions, qui seul possède une individualité ; en termes plus précis : chaque observateur décompose l'Univers en « espace » et en « temps », et deux observateurs en mouvement l'un par rapport à l'autre font deux décompositions différentes.

Chacun connaît, au moins un peu, la géométrie d'Euclide ; nous verrons qu'en, toute rigueur l'espace-temps n'est pas régi par les lois de cette géométrie, telles qu'on peut les étendre à une multiplicité à quatre dimensions. Une sphère, un ellipsoïde, etc., constituent des surfaces courbes auxquelles la géométrie euclidienne du plan ne s'applique pas : de même l'Univers possède une courbure. Cette courbure se manifeste à nos yeux par le phénomène de la gravitation universelle ; elle se traduit à nous par l'existence d'une force d'inertie qui nous a donné l'illusion d'une force attractive émanant de toute matière et agissant à distance sur toute matière. Il y a plus, comme dans l'ancienne mécanique, de masse invariable caractérisant une quantité déterminée de matière. La masse se confond avec l'énergie ; elle varie avec la vitesse et elle est relative à l'observateur car il n y a pas de vitesse absolue, toutes les vitesses de translation étant relatives.

Enfin l'Univers ne doit pas être infini dans toutes ses dimensions, et la quantité totale de matière existante doit être limitée.

La mécanique classique garde son importance parce qu'elle constitue une approximation plus que suffisante dans la pratique, et en général satisfaisante en astronomie et en physique. Mais il est nécessaire de savoir que les notions d'espace et de temps sur lesquelles elle a été fondée sont inexactes, et d'expliquer certains écarts constatés entre les faits expérimentaux et les prévisions déduites des anciennes lois.

On doit répandre les idées nouvelles. Loin de conduire à une complication de la science, elles révèlent une admirable harmonie, une merveilleuse synthèse des lois naturelles par laquelle on aperçoit pour la première fois les liens qui unissent des phénomènes qu'on pouvait croire indépendants.

La principale difficulté qu'on rencontre dans le développement de la théorie de la relativité vient de la répugnance à abandonner des idées acquises, et de l étonnement où l'on se trouve plongé devant certaines conséquences qui, par leur étrangeté, choquent ce que l'on considérait comme le bons sens. Je demande au lecteur d'avoir le courage, en abordant cette étude, de renoncer résolument à toute idée préconçue.

Pour la rédaction de cet opuscule, j ai eu recours aux mémoires de M. Einstein, aux conférences de M. P. Langevin qui a introduit en France les idées nouvelles et a beaucoup contribué à leur développement, enfin aux ouvrages de M. Eddington.

# Table des matières

# Première partie

# LE PRINCIPE DE RELATIVITÉ RESTREINT

# Chapitre 1

# Les notions anciennes d'espace et de temps

L'analyse des conceptions anciennes d'espace et de temps, sur lesquelles sont fondées la géométrie et la mécanique rationnelle, nous conduira à l'expérience célèbre par laquelle Michelson avait pensé mettre en évidence le mouvement absolu de la terre dans l'espace.

J'admettrai que le lecteur possède les bases de la géométrie d'Euclide (lignes droites et lignes courbes, droites parallèles, droites perpendiculaires l'une sur l'autre, angles, etc...) ; ces bases sont d'ailleurs presque intuitives. Je rappellerai seulement ce qu'on entend par "système de coordonnées", en priant les lecteurs qui seraient peu familiarisés avec les mathématiques de ne pas s'effrayer de l'aridité du début de ce chapitre. Il suffit d'un peu de réflexion pour reconnaître qu'il s'agit de notions très simples, et ces notions sont indispensables pour la compréhension de la théorie d'Einstein.

## 1.1 Systèmes de coordonnées

Supposons qu'une figure géométrique soit dessinée sur une feuille de papier plane. Si nous voulons préciser la forme de cette figure, il nous faut un moyen de repérer la position de chacun de ses points ; d'une façon générale, l'étude des figures qu'on peut tracer sur un plan exige qu'on ait un moyen de désigner sans ambiguïté un point quelconque de ce plan on y parvient à l'aide d'un système de coordonnées.

Nous pouvons, par exemple, marquer un point $O$ sur la feuille de papier et tracer, dans une direction d'ailleurs arbitrairement choisie, une droite $Ox$ passant par ce point (fig. 1.1). Joignons au point $O$ le point $A$ que nous voulons repérer, puis mesurons la distance $OA$ et l'angle que forment les

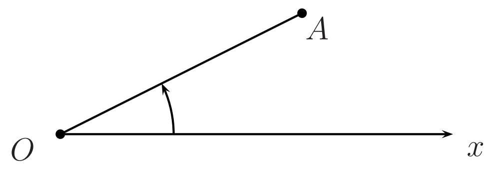


FIGURE 1.1 –

droites $OA$ et $Ox$ ; ces deux grandeurs, distance $OA$ et angle $\widehat{xOA}$ sont dites “coordonnées du point $A$”; elles déterminent entièrement la position de ce point car, le “pôle” $O$ et l'axe $Ox$ ayant été choisis une fois pour toutes, à chaque groupe de deux coordonnées correspond un point du plan et un seul. Ces coordonnées sont appelées coordonnées polaires.

Un autre système de coordonnées, dont nous ferons constamment usage, est celui des coordonnées cartésiennes rectangulaires. Par un point fixe $O$, appelé origine des coordonnées, traçons deux droites rectangulaires $Ox$, $Oy$ qui seront les axes de coordonnées (fig. 1.2). Nous pouvons repérer tout point

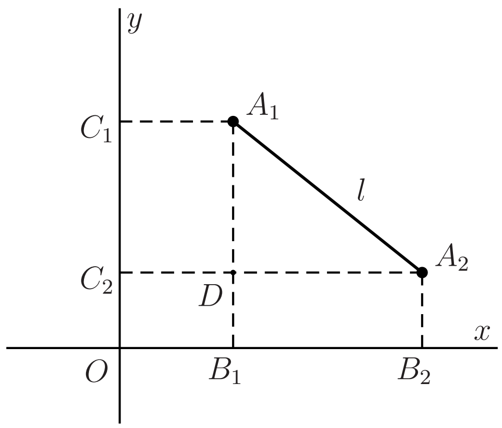


FIGURE 1.2 –

du plan par sa position relativement à ces axes en effet, du point $A_1$ abaissons, sur ces deux axes, deux perpendiculaires; nous déterminons ainsi la projection $B_1$ du point considéré sur l'axe $Ox$, et sa projection $C_1$ sur l'axe $Oy$; les distances $x_1 = 0B_1$ et $y_1 = OC_1$, comptées sur chacun des axes à partir de l'origine $O$ (positivement dans un sens, négativement en sens opposé), sont les coordonnées cartésiennes du point $A_1$. Prenons maintenant un second point $A_2$, de coordonnées $x_2$ et $y_2$, et proposons-nous d'exprimer la distance des deux points $A_1$ et $A_2$ en fonction de leurs coordonnées : d'après le théorème de Pythagore (le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés), on a $\overline{A_1A_2}^2 = \overline{A_1D}^2 + \overline{A_2D}^2$, ou, en désignant par $l$ la distance $A_1A_2$ des deux points,

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \tag{1.1}$$

Dans ce système de coordonnées, le carré de la distance de deux points est égal à la somme des carrés des différences de leurs coordonnées.

La géométrie des figures tracées sur notre feuille de papier plane est à deux dimensions, puisque deux coordonnées (deux quantités variables d'un point à un autre) sont nécessaires et suffisantes pour déterminer la position d'un point du plan. Un plan est une "multiplicité bidimensionnelle"[1].

Passons maintenant à la géométrie des figures tracées, non plus seulement sur un plan, mais dans l'espace ; il nous faut introduire une troisième dimension à la longueur et à la largeur vient se joindre la hauteur. Prenons dans l'espace un plan de référence $P$ (représenté en perspective sur la fig. 1.3). Dans ce plan nous pouvons, comme précédemment, choisir un point origine $O$ et deux axes de coordonnées $O_x$, $O_y$. Soit $A_1$ un point quelconque de l'espace ; de ce point abaissons une perpendiculaire $A_1M_1$ sur le plan $P$ ; le point $A_1$ est entièrement défini par les coordonnées $x_1$ et $y_1$ de sa projection $M_1$ sur le plan, auxquelles il faut joindre sa distance $z_1 = A_1M_1$ au plan (considérée comme positive d'un côté du plan et comme négative du côté opposé). Le point $A_1$ a donc trois coordonnées $x_1$, $y_1$, $z_1$ (coordonnées cartésiennes rectangulaires) ; en d'autres termes, l'espace est une "multiplicité tridimensionnelle" La construction que nous venons de faire revient à la suivante : par un point $O$ de l'espace, choisi comme origine des coordonnées, nous faisons passer trois plans rectangulaires $xOy$, $xOz$, $yOz$ qui se coupent suivant les droites rectangulaires $Ox$, $Oy$, $Oz$. Les distances $x_1$, $y_1$, $z_1$, d'un point $A_1$ de l'espace aux trois plans $yOz$, $xOz$, $xOy$, choisis une fois pour toutes, sont les coordonnées cartésiennes de ce point. Par une extension facile de la formule 1.1, le carré de la distance de deux points $A_1$ et $A_2$ de l'espace a pour expression, en fonction des coordonnées $x_1$, $y_1$, $z_1$ et $x_2$, $y_2$, $z_2$ de ces deux points

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \tag{1.2}$$

1. Il en est de même, d'ailleurs, d'une surface courbe, mais la géométrie des surfaces courbes n'est plus la géométrie d'Euclide. Nous reviendrons plus tard sur cette question.

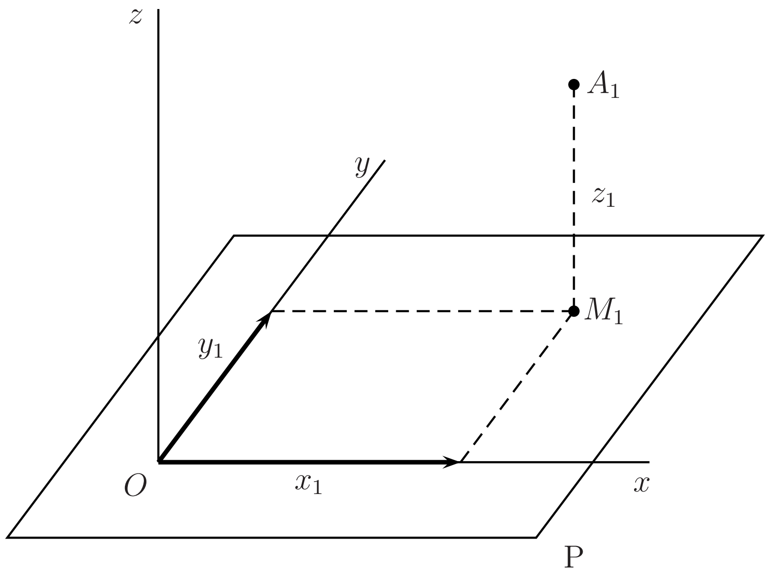


FIGURE 1.3 –

Un premier système de coordonnées $Oxyz$ ayant été choisi et tous les points de l'espace ayant été d'abord rapportés à ce système, nous pouvons changer de système en adoptant ensuite un second système $O'x'y'z'$. Supposons que ce second système soit immobile par rapport au premier. Six quantités sont nécessaires et suffisantes pour définir la position relative des deux systèmes d'axes : ce sont trois longueurs (les coordonnées de l'origine $O'$ du second système prises dans le premier système) qui déterminent la position relative des deux origines $O$ et $O'$, et trois angles qui définissent l'orientation relative des axes des deux systèmes. En géométrie analytique, on établit les formules qui permettent, connaissant ,ces six quantités, de passer d'un des systèmes à l'autre, c'est-à-dire d'exprimer les coordonnées nouvelles $x'$, $y'$, $z'$ d'un point en fonction des coordonnées anciennes $x$, $y$, $z$ du même point (et inversement).

Tous les systèmes de coordonnées (en nombre infini) immobiles les uns par rapport aux autres, constituent, à vrai dire, un seul et même système de référence (terme a retenir pour la suite), car on peut les supposer tous lies a un même corps de référence rigide. Par exemple, pour les phénomènes terrestres, il est naturel de prendre la terre comme corps de reférence et

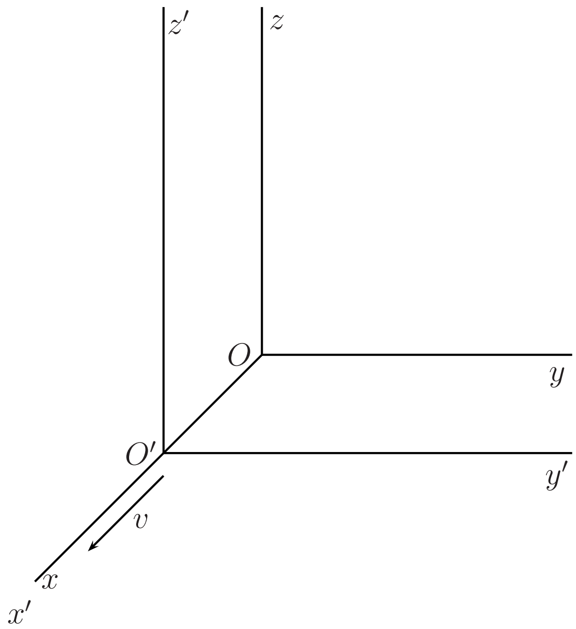


FIGURE 1.4 –

d'adopter un système quelconque de coordonnées lié à la terre [2].

## 1.2 Le groupe de transformations de Galilée

Supposons maintenant que, connaissant les coordonnées d'un point dans un premier système de coordonnées $S(Oxyz)$, on demande les coordonnées du même point de l'espace dans un second système $S'(O'x'y'z')$ en mouvement par rapport au premier système.

Ici s'introduit une notion nouvelle : mouvement signifie changement de position, et ce changement implique la notion de "temps".

Considérons un système $S'(O'x'y'z')$ en mouvement rectiligne et uniforme par rapport au système $S(Oxyz)$ c'est-à-dire se mouvant comme un ensemble rigide, par rapport à $S$, en ligne droite et avec une vitesse constante $v$.

Pour n'envisager que le cas le plus simple, nous supposerons que les axes des $x$ et des $x'$ sont confondus et parallèles à la direction de la vitesse (fig.

2. Il est vrai que la terre, dont l'écorce présente des marées, n'est pas un corps rigide, mais précisément on évalue les oscillations de l'écorce terrestre en les rapportant à un corps de reférence fictif supposé rigide, le géoïde.

1.4), que les axes des $y'$ et des $y$, des $z'$ et des $z$ sont parallèles, et qu'on compte le temps $t$ à partir du moment où les deux origines $O$ et $O'$ sont en coïncidence. Les formules de transformation sont évidentes : pendant le temps $t$, le point $O'$ s'est déplacé, à partir du point $O$, de la longueur $vt$ (par définition même de la vitesse qui est égale au quotient du trajet parcouru par le temps employé à le parcourir) ; donc, à l'époque $t$, la coordonnée $x'$ d'un point, quel qu'il soit, est inférieure à la coordonnée $x$ du même point dans le système $S$, de la longueur parcourue par $O'$ c'est-à-dire de $vt$ ; d'autre part les $y'$ et les $z'$ restent constamment égaux aux $y$ et aux $z$ ; on a donc (avec cette disposition particulière des axes des deux systèmes $S$ et $S'$)

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{1.3}$$

Ce sont les formules de transformation qui permettent de passer du système $S$ au système $S'$. Ces trois relations définissent une transformation dépendant d'un seul paramètre, la vitesse $v$, et toutes les transformations de ce genre correspondant à toutes les valeurs de $v$ constituent un groupe, c'est-à-dire que deux transformations successives de vitesses $v$ et $v'$ équivalent à une transformation unique de même forme ; on a d'ailleurs pour cette transformation unique une vitesse $v'' = v + v'$.

Ce groupe porte le nom de groupe de Galilée. Il constitue la base de la cinématique classique.

## 1.3 Les invariants fondamentaux dans l'ancienne conception de l'univers

La géométrie est la science des formes dans l'espace ; elle ne s'occupe pas du temps ; cependant, la notion d'espace et la notion de temps interviennent à la fois dans toutes nos observations, car celles-ci sont déterminées, non pas uniquement par des positions ou des formes dans l'espace, mais par le fait qu'il se passe quelque chose en un certain lieu à une certaine époque ; nos observations sont donc déterminées par des événements. Tout événement possède quatre coordonnées trois coordonnées d'espace qui fixent le lieu ou il s'est produit (par rapport à un corps de référence) et une coordonnée de temps (la durée écoulée à partir d'un événement origine jusqu'à l'époque où s'est produit l'événement considéré).

Les constatations d'événements nous conduisent à des relations entre diverses grandeurs mesurées par les observateurs : ces relations sont les lois de la physique. Il est évident que ces lois ne peuvent avoir une réalité objective que si elles sont indépendantes de l'observateur, que si elles peuvent s'exprimer sous une forme indépendante de tout système de reférence. Notre premier souci doit être de rechercher quels sont les éléments invariants, c'est-à-dire les grandeurs indépendantes de tout système de coordonnées ; nous allons montrer que, dans l'ancienne conception de l'univers, il existait deux invariants fondamentaux : l'intervalle de temps écoulé entre deux événements, et la forme des figures géométriques.

## 1.4 Le temps absolu

Dans les idées anciennes on admet que le temps est un invariant : c'est l'hypothèse du temps universel et absolu. Il est intéressant de chercher quelle doit être l'origine de ce postulat.

Imaginons un certain nombre de systèmes de référence en mouvement les uns par rapport aux autres ; dans chaque système se trouve un observateur, immobile par rapport à son système.

Deux événements $A$ et $B$ se produisent : pour l'observateur d'un des systèmes, $A$ est antérieur à $B$. Pourquoi s'est-on cru obligé d'admettre que $A$ est nécessairement antérieur à $B$ pour tous les autres observateurs, c'est-à-dire qu'on ne peut, dans aucun cas, par un changement convenable du système de référence, inverser l'ordre de succession de deux événements ?

Cela tient à ce qu'on suppose implicitement que, puisque $A$ s'est montré antérieur à $B$ pour un des observateurs, il a pu être la cause de $B$, ou tout au moins qu'il aurait pu influencer $B$. Comme il serait absurde de supposer que, pour d'autres observateurs, l'effet puisse être antérieur a sa cause, on est conduit à penser que l'ordre de succession de deux événements est toujours bien déterminé, qu'il est le même dans tous les systèmes.

Demandons-nous maintenant pourquoi on admet que $B$ a toujours pu être prévenu de $A$ c'est parce qu'on suppose la possibilité d'une influence pouvant se propager instantanément. Or cette possibilité, non seulement est compatible avec la mécanique ancienne, mais est exigée par cette mécanique où l'on admet la conception du solide parfait avec une tige rigide, on aurait pu signaler instantanément la production du premier événement au point où le second va se produire, et influencer ce second événement.

La notion de possibilité d'une propagation instantanée entraîne celle de simultanéité absolue : deux événements simultanés dans un système de référence sont simultanés dans tous les autres. Il résulte de là que, pour des événements non simultanés, la durée qui sépare deux événements $A$ et $B$ est la même pour tous les observateurs en mouvement les uns par rapport aux autres : considérons, en effet, deux systèmes $S$ et $S'$ dans chacun desquels les observateurs ont des horloges identiques. Prenons $A$ comme événement origine du temps dans chacun des systèmes ; $B$ se produit à l'époque $t$ du système $S$ et à l'époque $t'$ du système $S'$ ; la simultanéité étant absolue, les indications $t$ et $t'$ des deux horloges constituent deux événements simultanés, non-seulement pour les observateurs des systèmes $S$ et $S'$, mais pour tout observateur ; cela signifie que les heures marquées sont les mêmes pour tous les observateurs : l'intervalle de temps séparant $A$ et $B$ est absolu.

On voit que les notions de solide parfait (corps rigide) de propagation instantanée, de simultanéité absolue, de durée absolue s'unissent et s'adaptent complètement les unes aux autres. Qu'une de ces notions vienne à etre renversée, tout l'échafaudage s'écroulera.

## 1.5 L'espace absolu

La notion d'espace absolu dérive aussi de l'idée du solide parfait, ou encore de l'invariance de forme des figures géométriques.

Nous avons dit plus haut que la géométrie ne s'occupe pas du temps ; en termes plus précis, nous pouvons, dire qu'elle envisage seulement des événements simultanés, car la forme d'un objet est l'ensemble des positions simultanées de tous ses points (définition de M. P. Langevin). Si l'on admet que la simultanéité est absolue, une figure géométrique a une forme absolue, indépendante de l'état de mouvement du système de référence : par exemple un corps qui a la forme d'une sphère pour un observateur doit, d'après les idées anciennes, être encore une sphère pour tout observateur en mouvement par rapport au premier.

Nous trouvons alors un invariant fondamental de l'espace dans la distance spatiale de deux événements, à condition toutefois que ces événements soient simultanés (appendice, note 1).

D'autres invariants sont d'ailleurs envisagés en géométrie : ce sont les angles, surfaces, volumes.

Les équations qui expriment les lois de la géométrie sont sous la forme requise pour que ces lois soient objectives, car elles ne changent pas de forme par application des formules de transformation de coordonnées quand on passe d'un système de coordonnées à un autre.

Cette invariance de forme correspond à une réalité indépendante de tout système de référence : l'espace de la géométrie euclidienne, l'espace absolu.

Lorsque deux événements ne sont pas simultanés, leur distance spatiale cesse d'être un invariant : elle dépend du système de référence. Par exemple : un observateur quitte un lieu $A$ dans un véhicule qui le transporte dans un lieu $B$. Le départ de $A$ et l'arrivée en $B$ sont deux événements ; quelle est leur distance dans l'espace ? cela dépend du système de référence : dans un système lié à la terre, cette distance est la distance des deux points de la terre $A$ et $B$ ; dans un système de coordonnées lié à l'observateur, la distance est nulle, puisque les points de ce système où se sont passés les événements sont en coïncidence.

Ainsi, la distance de deux événements non simultanés est relative au système de référence. Sans doute, s'il y a un espace absolu, il doit y avoir une distance absolue dans cet espace, mais l'observateur ne peut pas la connaître parce que, ignorant son propre mouvement dans l'espace absolu, il ne peut pas tenir compte du trajet qu'il a parcouru pendant le temps écoulé entre les deux evenements.

Voilà un résultat étrange et peu satisfaisant pour l'esprit la cinématique classique fait envisager une dissymétrie entre les propriétés de l'espace et celles du temps : l'espace que nous percevons serait absolu pour les evenements simultanés, relatif pour des événements non simultanés, alors que le temps serait toujours absolu.

Cette dissymétrie disparaîtra dans l'espace-temps de la théorie nouvelle.

## 1.6 Les bases de la dynamique newtonienne

La dynamique introduit deux notions nouvelles, celle de force et celle de masse. Tout d'abord, il existe, dans l'ancienne mécanique, une loi fondamentale appelée loi d'inertie de Galilée : tout corps sur lequel n'est appliquée aucune force reste au repos ou se meut dans l'espace d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Autrement dit la matière conserve d'elle-même le mouvement acquis, tant qu'aucune influence, appelée force, ne l'oblige à modifier son mouvement. L'inertie est cette tendance de la matière à garder son état de mouvement.

Lorsqu'une force est appliquée sur un corps, le mouvement de celui-ci devient accéléré. On appelle accélération l'accroissement (positif ou négatif) de la vitesse dans l'unité de temps. Si la force agit constamment dans la direction de la vitesse acquise, la trajectoire reste rectiligne, la direction de la vitesse n'est pas modifiée mais sa grandeur est changée (accélération tangentielle) ; si, à chaque instant, la force agit dans une direction perpendiculaire à la trajectoire (normalement à la trajectoire), la vitesse reste constante en grandeur mais sa direction est constamment modifiée par la force (accélération normale) ; si la force est oblique sur la trajectoire, il y a à la fois changement de grandeur et changement de direction de la vitesse.

Ainsi, une force produit une accélération dans la direction où elle agit ; le rapport entre la grandeur de la force agissante et la grandeur de l'accélération prise par un corps sous l'action de cette force est, par définition, la masse de ce corps[3].

Dans la dynamique newtonienne, la masse d'une portion de matière est, à priori, considérée comme rigoureusement constante, indépendante des changements d'état que la portion de matière peut subir, indépendante de la vitesse : c'est un invariant qui a même valeur dans tous les systèmes de référence et qui caractérise une quantité déterminée de matière.

La force est une grandeur dirigée, un vecteur ; l'accélération est aussi un vecteur qui, d'après ce qui précède, est dirigé suivant la direction de la force ; la masse est une grandeur qui n'a pas de direction, un scalaire.

On démontre que les équations fondamentales de la dynamique conservent leur forme quand on passe d'un système de référence à un autre système en mouvement rectiligne et uniforme par rapport au premier (appendice, note 2). On peut les résumer par la relation vectorielle, indépendante de tout système de coordonnées

$$\vec{F} = m\,\vec{\gamma} \tag{1.4}$$

$\vec{F}$ et $\vec{\gamma}$ étant les vecteurs force et accélération, et $m$ désignant la masse de la portion de matière considérée.

L'invariance des lois de la mécanique permet d'en donner des énoncés intrinsèques, de même que les invariants de la géométrie (distances, angles, etc.) permettent d'énoncer les théorèmes sans faire intervenir des axes de coordonnées.

3. Il faut bien se garder de confondre la masse et le poids. Le poids d'un corps est la force qui agit sur lui dans le champ de gravitation de la terre il faut diviser le poids par l'accélération due à la pesanteur pour obtenir la masse. En un même lieu, tous les objets tombent avec la même vitesse (dans le vide. sinon la résistance de l'air les ralentirait inégalement) cela signifie que l'accélération due à la pesanteur est la même pour tous les corps a Paris. elle est égale à 981 en unités C. G. S., c'est-à-dire que pendant chaque seconde, la vitesse déjà acquise par un corps qui tombe s'accroît d'une vitesse supplémentaire égale à 981 centimètres par seconde. L'accélération étant la même pour tous les corps, il y a en un même lieu proportionnalité exacte entre les masses et les poids. Mais comme la terre n'est pas rigoureusement sphérique, le poids d'un corps n'est pas le même partout il est un peu plus grand aux pôles qu'à l'équateur cependant la masse reste constantes. Sur la lune, les poids des objets seraient beaucoup plus petits que sur la terre, mais les masses seraient les mêmes.

## 1.7 Le principe de relativité de la mecanique newtonienne

Puisque les lois de la mécanique sont les mêmes dans tous les systèmes en mouvement de translation uniforme, il est impossible, par des expériences mécaniques faites à l'intérieur d'un système clos, de mettre en évidence un mouvement de translation uniforme de ce système.

Le mouvement de translation uniforme n'a donc pas un caractère absolu ; on ne peut parler de translation uniforme que relativement à un corps de référence considéré, par convention, comme au repos.

Ce principe de relativité est conforme à l'expérience.

Par contre, il est essentiel de remarquer que toute accélération a un caractère absolu et peut être mise en évidence par des expériences intérieures à un système ; l'état d'accélération d'un système se manifeste, à l'intérieur de ce système, par l'existence d'une force qui, en tout point du système, agit sur une masse matérielle proportionnellement à cette masse ; on dit alors que dans un système accéléré, il règne un champ de force d'inertie. Voici un exemple bien connu la rotation de la terre autour de la ligne des pôles est un mouvement accéléré (tout mouvement qui n'est pas à la fois rectiligne et uniforme est accéléré ; ici le mouvement est uniforme, puisque la vitesse de rotation de la terre est constante, mais il n'est pas rectiligne). Il règne alors, en tout point de la terre, un champ de forces centrifuges : la verticale n'a pas rigoureusement la même direction que si la terre était immobile ; tout projectile est soumis a une force (appelée force centrifuge composée) qui dévie sa trajectoire ; la même force dévie les vents (vents alizés, vents contre-alizés) dans la circulation générale de l'atmosphère ; c'est elle enfin qui a été mise en évidence par l'expérience célèbre du pendule de Foucault. Si la terre avait été perpétuellement couverte d'un manteau de nuages, empêchant de constater sa rotation par l'observation du mouvement apparent des étoiles, on aurait cependant mesuré cette rotation avec le pendule de Foucault.

# Chapitre 2

# La recherche du mouvement absolu
# L'expérience de michelson
# Le principe de relativite

Si, par des expériences mécaniques à l'intérieur d'un système clos, il est impossible de révéler un mouvement de translation uniforme de ce système, il en est autrement lorsque le système n'est plus clos, lorsque l'observateur peut se mettre en relation avec un milieu extérieur. Il devient alors possible de mettre en évidence et de mesurer la vitesse par rapport au milieu extérieur.

Précisément, pour expliquer la propagation de la lumière, les physiciens avaient supposé l'existence d'un milieu doué de propriétés quasi-matérielles, l'éther, remplissant tout l'espace et pénétrant la matière. On devait donc espérer, par des expériences électromagnétiques [1] ou optiques, révéler un mouvement de translation par rapport à l'éther. L'éther s'identifiant en quelque sorte avec l'espace, on a appelé ce mouvement le mouvement absolu.

Imaginons que d'un point A dans l'éther parte un signal lumineux instantané. Une seconde plus tard, l'ébranlement formera une surface d'onde sphérique ayant pour centre le point A et pour rayon 300000 kilomètres, puisque la vitesse de la lumière est 300000 kilomètres par seconde. Supposons qu'un observateur soit parti de A en même temps que le signal, dans la direction AB et avec la vitesse v (fig. 2.1) ; au bout d'une seconde, il sera à la distance AB=v ; il ne se trouvera donc plus au centre de la sphère et, pour lui, la lumière ne se propagera pas avec la même vitesse dans toutes

1. L'éther devant être le siège de tous les phénomènes électromagnétiques. Rappelons que les ondes hertziennes (T. S. F.) sont de même nature que les ondes lumineuses

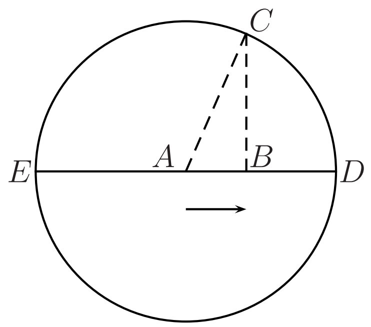


FIGURE 2.1 –

les directions : la vitesse de la lumière, relativement à cet observateur, devra être, si l'on désigne par c la vitesse de la lumière dans l'éther (le rayon de la sphère), $BD = c - v$ dans la direction de la vitesse v, $BE = c + v$ dans la direction opposée et $BC = \sqrt{c^2 - v^2}$ dans la direction perpendiculaire. L'observateur devra pouvoir constater et mesurer cet effet.

## 2.1 Experience de Michelson

Voici le principe de l'expérience que Michelson a réalisée : Un faisceau de rayons lumineux issus d'une source lumineuse et rendus sensiblement parallèles par une lentille tombe sous l'incidence de 45" sur une lame de verre A dont la première face est légèrement argentée ; cette lame réfléchit une partie du faisceau et laisse passer l'autre partie. Après réflexion normale sur les miroirs M1 et M2 qui sont placés sur deux bras rectangulaires, on obtient deux faisceaux qui ont parcouru, l'un le chemin $SOM_1OL$ (fig. 2.2), l'autre le chemin $SOM_2OL$ et qui viennent se superposer suivant la direction $OL$ ; ils sont reçus dans une lunette t. Tout se passe comme si le rayon $SOM_1OL$ avait parcouru le chemin $SOM'OL$, $M'$ étant l'image, appelée plan de référence,du miroir M1 produite par la lame argentée A.

Avec ce dispositif, il se produit un phénomène bien connu en optique sous le nom d'interférences lumineuses. Chaque fois que deux faisceaux lumineux issus d'une même source se superposent en se propageant dans une même direction après avoir suivi des chemins différents, on constate des franges, c'est-à-dire des lignes alternativement brillantes et obscures dues au fait qu'en certains points les vibrations lumineuses ajoutent leurs effets, alors qu'aux points intermédiaires elles se détruisent mutuellement.

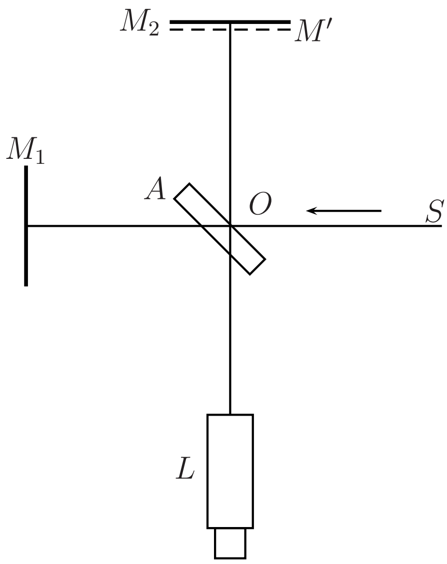


Figure 2.2 –


Figure 2.3 –

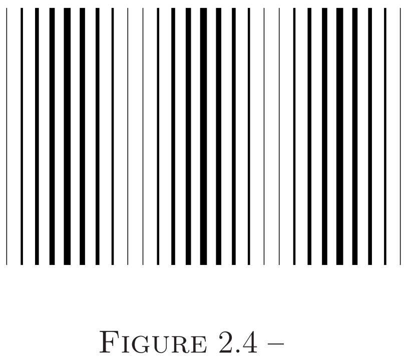

Figure 2.4 –

Si les deux bras de l'appareil ont la même longueur, c'est-à-dire si le miroir M2 et le plan de référence M' sont superposés, il suffit d'incliner légèrement le miroir M2 (fig. 2.3) et de viser ce miroir dans la lunette L pour voir des franges rectilignes (fig. 2.4). En lumière monochromatique (une seule couleur pure), on voit dans tout le champ de la lunette des franges régulièrement espacées, mais comme l'espacement des franges dépend de la couleur, si l'on emploie de la lumière blanche on ne voit plus que quelques franges, les autres disparaissant par enchevêtrement des diverses couleurs ; ces quelques franges visibles sont irisées, sauf une, la frange centrale qui est noire et nettement reconnaissable.

On démontre que cette frange centrale est produite par la superposition de ceux des rayons qui ont mis exactement le même temps à parcourir les deux chemins [2].

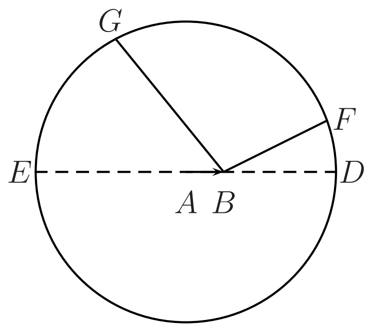


FIGURE 2.5 –

Si la terre est en mouvement dans l'éther, pour l'observateur entraîné avec elle, la vitesse de la lumière doit dépendre de la direction. Considérons de nouveau la surface sphérique sur laquelle doit se trouver un ébranlement lumineux au bout d'une seconde (fig. 2.5). La terre se trouve en B ; par ce point. menons des parallèles aux deux bras de l'appareil : BF et BG sont les vitesses de la lumière, relativement à l'observateur, suivant les directions des deux bras de l'appareil ; ces vitesses étant inégales, la frange centrale, qui correspond aux rayons ayant mis le même temps à parcourir les deux bras (aller et retour), ne doit pas occuper la position qu'elle aurait si la vitesse était la même suivant les deux bras, et sa position doit dépendre

2. Ne pouvant faire ici la théorie des interférences, je dois prier le lecteur d'admettre tous ces résultats, Ici la frange centrale est noire parce que l'un des rayons (SO) se réfléchit en O en venant de l'air, alors que l'autre rayon (MiO) se réfléchi en O en venant de l'intérieur du verre.

de l'orientation de l'appareil par rapport au mouvement dans l'éther. Par conséquent, si l'on tourne l'appareil (qui est mobile sur une plate-forme). la frange centrale et avec elle tout le système des franges doivent se déplacer par rapport au réticule de la lunette.

Supposons qu'on n'observe aucun déplacement ; si l'on considère la théorie précédente comme exacte, on doit penser que B est au centre de la sphère, c'est-à-dire qu'a ce moment particulier la terre est immobile dans l'éther, que sa vitesse de translation sur son orbite se trouve, par hasard, compenser exactement la vitesse du système solaire dans l'éther. Mais alors, six mois plus tard, la terre ayant par rapport au soleil une vitesse égale, mais de direction opposée a celle qu'elle avait la première fois, aura, par rapport à l'éther, une vitesse égale au double de sa vitesse orbitale, soit une vitesse de 60 kilomètres par seconde. Pour observer l'effet, on devra placer l'appareil de manière que la différence des temps mis par la lumière à parcourir les deux bras aller et retour, soit aussi grande que possible, c'est-à-dire orienter l'un des bras dans la direction de la translation de la terre sur son orbite on observera les franges en les repérant avec le réticule, puis on permutera les rôles des deux bras en faisant tourner la plate-forme d'un angle droit ; on devra alors observer un déplacement des franges par rapport à leur position précédente.

L'expérience, faite par M. Michelson en 1881, a été répétée par MM. Michelson et Morley (1887), puis par MM. Morley et Milter (1904-1905) dans des conditions d'extrême précision par des réflexions successives, le trajet de la lumière entre la lame et les miroirs avait été porté à 22 mètres. Pour une vitesse de 60 kil./sec., le déplacement des franges, par rotation de l'appareil, devait atteindre une fois et demie la distance séparant deux franges consécutives, valeur énorme car la précision des mesures était du centième de la distance de deux franges.

Fait remarquable on n'a jamais obtenu aucun déplacement des franges à aucune époque de l'année. Tout se passe comme si la terre était toujours immobile.

Le désaccord entre l'expérience et la théorie est brutal. Nous allons en chercher les causes.

## 2.2 La contraction de Fitzgerald-Lorentz

L'expérience de Michelson montre que la lumière met le même temps à parcourir les deux bras de l'appareil (aller et retour) quelle que soit leur orientation. Admettant l'inégalité des vitesses de la lumière dans la direction de la vitesse de la terre et dans la direction perpendiculaire, on trouve que les deux bras sont parcourus dans des temps égaux si l'on suppose que le bras dirigé dans la direction de la vitesse v de la terre s'est contracté, et que sa longueur, qui serait $l$ si la terre était immobile, est devenue

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{2.1}$$

c étant la vitesse de la lumière dans l'éther. (Appendice, note 3.)

L'hypothèse de M. Fitzgerald et de M. Lorentz est ainsi la suivante :

*Pour tous les corps, les dimensions linéaires parallèles au mouvement dans l'éther subissent un raccourcissement, dû uniquement à ce mouvement absolu, dans le rapport $\frac{l'}{l} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Les dimensions perpendiculaires à la vitesse absolue ne sont pas altérées.*

Cette contraction serait, en général, très faible (cinq millionièmes de millimètre par mètre pour une vitesse de 30 kilomètres par seconde) mais elle deviendrait considérable aux très grandes vitesses, et pour une vitesse égale à la vitesse de la lumière ($v = c$, $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0$) tous les objets seraient réduits à deux dimensions. L'observateur ne s'apercevrait d'ailleurs jamais de la contraction, car tous ses instruments de mesure la subiraient, et il la subirait lui-même. Il serait impossible de révéler le mouvement absolu.

Cette hypothèse cherche à sauvegarder les bases de la mécanique classique et la notion de temps absolu dont elle dérive. La contraction serait bien une contraction réelle produite par le mouvement absolu dans l'éther ; elle serait la même pour toute matière.

Mais est-il vraiment possible d'admettre que la contraction, si elle est réelle, soit la même pour tous les corps, c'est-à-dire soit indépendante de la substance, quelle que soit la rigidité de celle-ci ? se produit-elle aussi pour les gaz, et alors où est la limite entre un gaz raréfié et l'espace vide ?

Comment admettre que la contraction soit une propriété de la matière ? ne traduirait-elle pas plutôt une propriété métrique de l'espace dans lequel nous apparaît la matière ? La théorie d'Einstein nous donnera la réponse .

## 2.3 Le point de vue d'Einstein

Pour rendre compte de l'insuccès de toutes les expériences électromagnétiques[3] ou optiques par lesquelles on avait cherché à révéler le mouvement absolu, pour exprimer les faits de la façon la plus simple, M. Einstein a énoncé les principes suivants :

3. Diverses expériences électromagnétiques ont conduit à des résultats négatifs.

**Principe de relativité** Les lois des phénomènes physiques sont les mêmes dans tous les systèmes en translation uniforme les uns par rapport aux autres.

Ce principe constitue l'extension aux phénomènes électromagnétiques et optiques du principe de relativité de la mécanique. Sous la forme précédente il est restreint au cas de la translation uniforme.

**Principe de la propagation isotrope de la lumière** Dans tout système en mouvement de translation uniforme (c'est-à-dire dans lequel ne règne aucun champ de force d'inertie), la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions ; cette vitesse ne dépend pas de l'état de mouvement de la source lumineuse.

Ce principe particulier, conforme au principe de relativité (restreint), a pour conséquence immédiate que l'expérience de Michelson ne devait rien donner. Le mouvement de la terre sur son orbite peut, pendant la courte durée d'une expérience, être considéré comme rectiligne et uniforme ; si la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions, les franges d'interférences gardent évidemment une position invariable quand on tourne la plate-forme de l'appareil de Michelson.

Nous verrons bientôt comment le principe de relativité, joint à la loi de propagation isotrope de la lumière, exige une transformation radicale des notions d'espace et de temps.

# Chapitre 3

# L'invariance de la vitesse de la lumière

## 3.1 le temps et la simultanéité

M. Einstein a, dès le début de sa théorie, analysé d'une manière remarquable la notion de temps.

On doit d'abord remarquer que, dans toutes les circonstances où le temps joue un rôle, il s agit toujours d'événements simultanés. Quand nous disons le train part à 8 heures, cela signifie : l'indication 8 heures des aiguilles de l'horloge et le départ du train sont deux événements simultanés.

La simultanéité de deux événements se produisant au même endroit (ou presque au même endroit) se passe de définition, mais une définition devient nécessaire quand il s'agit de coordonner des événements se produisant en des lieux éloignés.

Considérons un système S (sans accélération). Au point A se trouvent un observateur et une horloge immobiles dans ce système : l'observateur A peut situer dans le temps tous les événements qui se produisent dans son voisinage immédiat. En un autre point B, se trouvent aussi un observateur et une horloge rigoureusement identique à l'horloge du point A ; cet observateur B peut, de son côté, coordonner tous les événements qui se produisent autour de lui. La question est de coordonner les événements qui se passent en A avec ceux qui se passent en B, car il s'agit d'avoir, non pas seulement un temps de A et un temps de B, mais un temps commun aux points A et B.

Ce temps sera défini de la façon suivante : Puisque, dans un même système, la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions (principe de l'isotropie de la propagation), le temps que met la lumière à aller de A en B est égal au temps qu'elle met à aller de B en A.

Faisons alors partir de A un signal lumineux à l'instant $t_A$ marqué par l'horloge du point A ; ce signal arrive en B à l'instant $t_B$ marqué par l'horloge de B ; faisons-le réfléchir sur un miroir placé en B de manière à le renvoyer en A ; il sera de retour en A à l'instant $t'_A$. marqué par l'horloge de A.

L'horloge du lieu B est synchrone avec celle du lieu A, par définition, si l'on a

$$t_B - t_A = t'_A - t_B \quad \text{ou} \quad t_B = \frac{t_A + t'_A}{2} \tag{3.1}$$

on peut dire encore que l'horloge de B est synchrone avec l'horloge de A lorsqu'un signal lumineux parti de A à l'époque $t_A$ (temps de A) arrive en B à une époque $t_B$ (temps de B) telle que

$$\frac{\text{distanceAB}}{t_A - t_B} = c \tag{3.2}$$

$c$ étant la vitesse de la lumière [1].

Cette définition du synchronisme ne soulève aucune objection, car elle est valable pour tous les points du système de référence. En effet :

1. Si l'horloge de B est synchrone avec celle de A, l'horloge de A est synchrone avec celle de B.
2. Si l'horloge de A est synchrone avec l'horloge de B et avec celle d'un troisième point C, les horloges de B et de C sont synchrones entre elles.

Nous comprenons maintenant ce qu on doit entendre par simultanéité de deux événements qui se produisent en des lieux différents A et B. L'événement EA au point A et l'événement EB au point B sont simultanés lorsque les époques simultanées à ces événements marquées par deux horloges synchrones en A et B sont les mêmes.

Par ces définitions du synchronisme et de la simultanéité, nous avons une définition précise du temps d'un système tout entier. Il est essentiel de remarquer que cette définition est basée sur la propagation isotrope de la lumière.

Il est impossible de synchroniser deux horloges en mouvement relatif, car nous verrons que deux systèmes en mouvement l'un par rapport à l'autre ont des temps différents.

1. Un semblable procédé est pratiquement employé pour la comparaison des heures des observatoires et la détermination des longitudes par La T. S. F.

## 3.2 La vitesse de la lumiere est une constante universelle

Le principe de relativité et le principe de l'invariance de la vitesse de la lumière dans un même système ont pour conséquence immédiate que la vitesse de la lumière a la même valeur dans tous les systèmes en translation uniforme les uns par rapport aux autres.

Si, en effet, la vitesse de la lumière devait être plus grande dans le système S' que dans le système S, comme toutes les directions de l'espace sont équivalentes dans chaque système (isotropie) et que rien ne distingue le système S' du système S puisque les lois physiques sont les mêmes dans ces deux systèmes (principe de relativité), la vitesse de la lumière devrait aussi être plus grande dans S que dans S' ; on arriverait à une contradiction. Il faut donc que la vitesse de la lumière soit une constante universelle.

Il est essentiel de bien préciser la signification de ce résultat : nous supposons que, dans divers systèmes en translation uniforme, les observateurs sont munis des mêmes étalons de longueur, c'est-à-dire de règles qui, si on les mettait à côté les unes des autres dans un même système (et bien entendu dans des conditions physiques rigoureusement identiques) auraient la même longueur ; nous supposons aussi que les observateurs ont des horloges étalons identiques (appendice, note 4). Dans ces conditions, si ces divers observateurs prennent, chacun dans son système, une base (de longueur et d'orientation quelconque) et mesurent le temps employé par la lumière à parcourir cette base, en divisant le nombre qui mesure la base par le nombre qui mesure l'intervalle de temps, ils doivent tous trouver le même quotient.

# Chapitre 4

# La transformation de Lorentz Relativité de l'espace et du temps

## 4.1 Le groupe de Lorentz

On démontre (appendice, note 5) que le principe de relativité et l'invariance de la vitesse de la lumière conduisent à des formules de transformation de coordonnées profondément différentes de celles de Galilée (1.3). Si deux observateurs appartenant à des systèmes de référence différents $S$ et $S'$ en translation uniforme choisissent un même evénement origine et des axes de coordonnées ayant la disposition simple précédemment indiquée (1.4), les coordonnées d'espace et de temps d'un même evenement noté $x$, $y$, $z$, $t$ par l'observateur du système $S$ et $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ par l'observateur du système $S'$ doivent être unies par les relations suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{1}{\alpha}(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{1}{\alpha}(t - \frac{vx}{c^2}) \end{array}\right. \tag{4.1}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{\alpha}(x' + vt) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{1}{\alpha}(t' + \frac{vx'}{c^2}) \end{array}\right. \tag{4.2}$$

– $v$ désigne la vitesse du système $S'$ par rapport au système $S$ ;
– $c$ désigne la vitesse de la lumière ;

– $\alpha$ représente $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ (abréviation à retenir pour la suite).

Il est essentiel de noter que ces formules sont soumises à la restriction de la relativité restreinte, c'est-à-dire ne s'appliquent qu'à des systèmes en mouvement rectiligne et uniforme.

Les formules 4.1 expriment le passage de $S$ à $S'$ et les formules 4.2 le passage de $S'$ à $S$. On voit que les formules 4.2 ne diffèrent des formules 4.1 que par la permutation des lettres accentuées et des lettres non accentuées et par le remplacement de $v$ par $-v$ ; par conséquent, si $v$ est la vitesse de $S'$ par rapport à $S$, la vitesse de $S$ par rapport à $S'$ est $-v$.

Le groupe de transformations représenté par les formules qui précèdent a été découvert par M. H.-A. Lorentz, puis retrouvé par M. Einstein comme conséquence des principes qu'il a énoncés. M. Lorentz l'a obtenu en cherchant les conditions,pour que les lois générales de l'électromagnétisme, exprimées par les formules de Maxwell, gardent la même forme dans tous les systèmes de référence (en translation uniforme), c'est-à-dire soient les mêmes dans tous les systèmes, condition nécessaire pour qu'elles aient une réalité indépendante de l'observateur. M. Lorentz a établi :

1. que les équations fondamentales de l'électromagnétisme n'admettent pas le groupe de transformations de la mécanique (groupe de Galilée), c'est-à-dire qu'en effectuant dans ces équations les transformations de ce groupe, on obtient des équations d'une forme tout à fait différente.
2. que ces équations admettent un autre groupe de transformations, celui exprimé par les formules 4.1 et 4.2.

La différence entre le groupe de Lorentz et celui de Galilée est profonde. Au lieu du temps $t$ du système $S$, il faut introduire dans le système $S'$ un autre temps $t'$ que M. Lorentz a appelé temps local (parce qu'il dépend de la coordonnée x du lieu considéré).

M. Lorentz avait considéré ce temps local comme une fiction mathématique. Il appartient à M. Einstein de lui avoir attribué une réalité physique c'est le temps que marquent, dans le système $S'$, des horloges identiques à celles qui, dans le système $S$, mesurent le temps $t$.

## 4.2 Les lois de la mécanique doivent être compatibles avec celles de l'électromagnétisme

En résumé, les deux principes énoncés par M. Einstein (chap. 2), le principe de relativité et le principe de l'isotropie de la propagation de la lumière ont pour conséquence :

1. que la vitesse de la lumière est une constante universelle ;
2. que les transformations des coordonnées d'espace et de temps, quand on passe d'un système à un autre (sous la réserve de la translation uniforme) sont les transformations du groupe de Lorentz. On peut vérifier que ces transformations conservent leur structure aux équations du champ électromagnétique.

Inversement, si l'on cherche, comme l'avait fait M. Lorentz, les formules de transformation qui laissent invariantes les lois de l'électromagnétisme, on obtient les formules (4.1) et (4.2) qui impliquent la constance de la vitesse de la lumière et la relativité du temps.

Nous sommes donc en présence de deux groupes de transformations :

1. Le groupe de Galilée, qui seul laisse invariantes les lois de la mécanique classique ;
2. Le groupe de Lorentz, qui seul laisse invariantes les lois de l'électromagnétisme.

Doit-on conserver a la fois les lois de la mécanique classique avec le groupe de Gaulée, et les lois de l'électromagnétisme avec le groupe de Lorentz ?

Cela est impossible. Les premières admettent un temps absolu, les secondes impliquent un temps relatif : Adopter le temps absolu de la mécanique, c'est renoncer a l'invariance des lois de l'électromagnétisme ; adopter le temps relatif de l'électromagnétisme, c'est abandonner la mécanique newtonienne. Il y a bien incompatibilité radicale, car il n'y a qu'un seul temps physique dans un même système de référence.

Le désaccord qui s'est manifesté entre la théorie mécanique de l'expérience de Michelson et le résultat expérimental apparaît comme la cause d'un conflit entre les lois de la mécanique classique et celles de l'électromagnétisme.

Il faut choisir, et il n'est pas permis d'hésiter, puisque le choix est imposé par l'expérience : les lois de l'électromagnétisme sont trop bien vérifiées pour qu'on puisse songer à les abandonner ; l'expérience est d'accord avec le groupe de Lorentz qui exprime l'invariance de ces lois. Cela est d'ailleurs logique et l'on devait s'y attendre : les lois de l'électromagnétisme ont été établies dans un système de référence qui n'est nullement privilégié dans l'univers ; elles s'expriment sous une forme claire et simple, et deviendraient compliquées par une transformation différente de celle du groupe de Lorentz. Il serait déraisonnable de supposer que ces lois simples sont spéciales à un système de référence lié à la terre et d'ailleurs la preuve de leur invariance est le fait qu'elles ne changent pas dans le cours de l'année, malgré le changement du système de référence, la terre changeant de direction sur son orbite.

Au contraire, nous n'avons aucune raison de considérer les lois de la mécanique comme exactes ; elles peuvent paraître valables dans les phénomènes ordinaires, trop grossiers pour qu'une discordance se révèle, mais dès qu'il s'agit de phénomènes comportant, comme l'expérience de Michelson, une vérification d'une haute précision, le désaccord apparaît.

Ainsi, le résultat de Michelson, l'échec de toutes les tentatives faites pour révéler le mouvement absolu de la terre, tiennent à des causes profondes, qu'on n'avait pas soupçonnées dans les débuts de la théorie électromagnétique, mais qu'on s'explique aujourd'hui. *Il faut renoncer à considérer les lois de la mécanique classique comme des lois rigoureuses ; il faut soumettre la mécanique aux lois de l'électromagnétisme*, en appliquant à tous les phénomènes les formules de transformation d'espace et de temps du groupe de Lorentz. Les lois classiques deviennent alors des approximations, d'ailleurs excellentes dans la plupart des cas on remarque, en effet, que si la vitesse de la lumière était infinie, on aurait les formules de Galilée. Or la vitesse de la lumière est très grande, et tant que le carré de la vitesse des corps (vitesse par rapport à l'observateur) peut être négligé vis-à-vis du carré de la vitesse de la lumière, on peut se servir de la mécanique habituelle.

On voit, par cette dernière remarque, que le désaccord entre la mécanique newtonienne et l'électromagnétisme est un aspect du conflit profond qui a dominé la physique jusqu'à l'époque actuelle le conflit entre *la théorie des actions à distance instantanées* admise en mécanique céleste jusqu'à la découverte de la loi nouvelle de la gravitation (loi d'Einstein), et *la théorie de l'action de proche en proche avec vitesse finie*, à laquelle Maxwell a donné son plein développement.

*Les équations de Maxwell entraînent la négation du temps physique absolu* ; impliquant la notion de temps relatif, ces équations interdisent la possibilité d'une relation de cause à effet, quelle qu'elle soit, pouvant se propager avec une vitesse infinie.

Nous affirmons donc que *la seule cinématique ayant un sens expérimental et aussi grâce à laquelle les lois de la physique prennent une forme simple, indépendante du système de référence, est la cinématique du groupe de Lorentz.* (M.-P. Langevin. [1])

C'est là la base solide de la théorie de la relativité et de la mécanique nouvelle.

## 4.3 L'espace et le temps relatifs

Avec les formules de Lorentz, où le temps n'est plus un invariant, nous voyons disparaître la dissymétrie qui, avec le groupe de Galilée, existait entre

1. I.Bulletin de la société des électriciens, nř84. déc. 1919.

l'espace et le temps. Dans l'ancienne cinématique, la distance spatiale de deux événements non simultanés dépendait du système de référence, mais l'intervalle de temps écoulé entre eux était absolu. Maintenant, la durée écoulée est relative, tout comme l'intervalle d'espace. Soient, en effet, deux événements (indices 1 et 2) ; les formules de Lorentz (4.1) donnent :

$$\begin{cases} x'_2 - x'_1 = \frac{1}{\alpha}\,(x_2 - x_1) - \frac{1}{\alpha}\,v\,(t_2 - t_1) \\ t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\alpha}\,(t_2 - t_1) - \frac{1}{\alpha}\,\frac{v}{c^2}\,(x_2 - x_1) \end{cases} \tag{4.3}$$

La symétrie de ces deux équations est remarquable.

Il n'y a plus de simultanéité absolue, car lorsque deux événements sont simultanés dans un système ($t_1 = t_2$) ils ne sont simultanés dans aucun autre système en mouvement par rapport au premier (puisque d'après la seconde équation (4.3) $t_1$ est différent de $t_2$), à moins que ces événements ne coïncident à la fois dans l'espace et dans le temps. Dans ce dernier cas, la coïncidence a lieu dans tout système, il y a coïncidence absolue, On comprend aisément que la coïncidence dans l'espace et dans le temps ait un sens absolu, car il peut en résulter un effet sur lequel tous les observateurs sont nécessairement d'accord (par exemple rupture de deux objets par choc mutuel).

La relativité complète de l'espace et du temps perçus par chaque observateur entraîne la suppression des notions de système fixe et de mouvement de translation absolu. L'éther, du moins celui admis autrefois, doué de propriétés élastiques et mécaniques, doit être supprimé. Nous verrons, dans la relativité généralisée, par quelle conception on peut le remplacer.

## 4.4 La composition des vitesses

Un observateur (système $S$) voit passer un train avec une vitesse $v$. dans le train (système $S'$) un homme se déplace avec la vitesse $v'$ (par rapport au train), quelle est la vitesse de cet homme par rapport à l'observateur ?

On est tenté de répondre $v + v'$. C'est en effet la loi de composition des vitesses qui résulte de l'ancienne cinématique.

Cela paraît évident, parce qu'il est difficile de se débarrasser des anciennes notions d'espace et de temps. Cependant il résulte des formules de Lorentz (appendice, note 6) que la vitesse $v''$ du mobile, mesurée dans le système $S$, est, non pas $v + v'$, mais

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{v\ v'}{c^2}} \tag{4.4}$$

Cette formule s'applique à la composition de deux vitesses *mesurées dans des systèmes différents* ($v$ est mesurée dans le système $S$, $v'$ est mesurée dans le système $S'$).

Evidemment, dans l'exemple du train, le terme $\frac{v\,v'}{c^2}$ qui intervient au dénominateur est absolument négligeable, de sorte que la loi ancienne est une approximation plus que suffisante ; mais il n'en serait plus de même si les vitesses étaient considérables supposons un observateur A et deux observateurs B et C s'éloignant de A, dans des directions opposées, avec la vitesse, mesurée par A, de 200000 kilomètres par seconde. Pour l'observateur A, les observateurs B et C s'éloignent l'un de l'autre de 400000 kilomètres par seconde - ceci reste exact, bien entendu - mais si chacun des observateurs B et C mesurait la vitesse de l'autre, il trouverait seulement 277000 kilomètres par seconde.

La nouvelle loi de composition des vitesses montre qu'un mobile, par accroissements successifs de vitesse à partir de sa vitesse primitivement acquise, n'atteint jamais la vitesse c de la lumière. *La vitesse de la lumière est une vitesse limite qui ne peut être dépassée, et si l'une des vitesses, v ou* $v'$ *était égale a c, on trouverait encore* $v'' = c$

## 4.5 L'expérience de Fizeau, dite "Entrainement des ondes lumineuses par la matiere en mouvement

Une célèbre expérience, réalisée en 1851 par Fizeau, vérifie remarquablement bien la nouvelle loi de composition des vitesses.

On sait que dans la matière au repos (par rapport à l'observateur) la vitesse de la lumière est $\frac{c}{n}$, $n$ étant l'indice de réfraction de la matière, variable avec la radiation employée[2].

Quelle est, pour l'observateur, la vitesse de la lumière dans un milieu animé d'une vitesse $v$ ? Fresnel a déduit de considérations théoriques que cette vitesse doit être

$$\frac{c}{n} \pm v\ (1 - \frac{1}{n^2}) \tag{4.5}$$

la vitesse d'entraînement $v\ (1-\frac{1}{n^2})$ s'ajoutant à la vitesse $\frac{c}{n}$ dans la matière au repos ou se retranchant de cette vitesse selon que le sens du mouvement de la matière est celui de la propagation de la lumière ou le sens opposé.

La formule de Fresnel a été vérifiée par Fizeau. Ce physicien a observé les franges d'interférences produites par deux rayons issus d'une même source,

2. C'est parce que $n$ varie d'une radiation à l'autre que le prisme sépare les diverses couleurs dont la superposition constitue la lumière blanche.

après passage en des sens opposés dans des tubes remplis d'eau, et a déduit des mesures du déplacement des franges, lorsque l'eau est en mouvement, que le "coefficient d'entraînement" est bien $(1 - \frac{1}{n^2})$.

Ce résultat avait été interprété en admettant un entraînement de l'éther, non pas total, mais partiel (avec une vitesse $v\ (1 - \frac{1}{n^2})$ interprétation étrange car l'entraînement de l'éther dépendrait de $n$, c'est-à-dire dépendrait de la couleur de la radiation employée).

Cette loi d'entraînement s'explique immédiatement, de la façon la plus simple, par la cinématique nouvelle.

Il suffit d'écrire la loi de composition des vitesses (4.4). Le courant d'eau (système $S'$) coule relativement à l'observateur (système $S$) avec la vitesse $v$. Le rayon lumineux se propage dans l'eau (système $S'$) avec la vitesse $v' = \frac{c}{n}$ ;

la vitesse $v''$ de ce rayon mesurée par l'observateur est donc, d'après (4.4),

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{v\ v'}{c^2}} = \frac{v + \frac{c}{n}}{1 + \frac{v}{c\ n}} \Rightarrow v'' \approx \frac{c}{n} + v\ (1 - \frac{1}{n^2}) \tag{4.6}$$

C'est bien le résultat vérifié par Fizeau.

Il convient de mentionner que M. Lorentz avait expliqué ce phénomène par l'action des électrons entraînés avec la matière, mais cette explication. basée sur les lois de l'électromagnétisme, n'est au fond qu'une forme déguisée de l'explication relativiste.

# Chapitre 5

# L'univers de Minkowski

> A l'heure actuelle, l'espace et le temps considérés en eux-mêmes doivent disparaitre comme des fantômes et seule leur union peut posséder une individualité.
> H. MINKOWSKI
> (Raum und Zeit, 1908.)

## 5.1 Union de l'espace et du temps

Soient deux événements quelconques. Lorsqu'on les repère dans des systemes différents, la durée $T$ qui les sépare et la distance spatiale $l$ des points où ils se produisent varient d'un système à l'autre, mais la quantité

$$s^2 = c^2 T^2 - l^2 \tag{5.1}$$

a la même valeur dans tous les systèmes ; on le vérifie immédiatement en appliquant les formules de Lorentz.

En langage ordinaire, le carré du produit de la vitesse de la lumière par le temps écoulé entre les événements, diminué du carré de leur distance dans l'espace, est une quantité indépendante de tout système de référence (en translation uniforme).

L'INVARIANT $s$ EST L'INTERVALLE D'UNIVERS, il vient remplacer les deux invariants d'autrefois (chap. 1) : le temps et la distance dans l'espace de deux événements simultanés.

Dans la théorie ancienne, la réalité objective du temps était affirmée par l'invariance du temps (le temps universel et absolu) ; la réalité objective de l'espace résultait de l'invariance de la distance géométrique de deux points (distance de deux événements simultanés).

Il n'y a plus maintenant d'espace absolu ni de temps absolu ; il ne subsiste qu'une réalité unique affirmée par l'invariant $s$. La modification est radicale le nouvel invariant contient à la fois les trois coordonnées d'espace $x$, $y$, $z$ et la coordonnée de temps $t$

$$s^2 = c^2\,(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \tag{5.2}$$

*L'espace et le temps, unis par cet invariant, ne sont pas indépendants et leur union seule possède une individualité. L'Espace-Temps ou Univers est l'ensemble des événements ; est une multiplicité "quadridimensionnelle".*

L'Univers est indépendant du système de référence qui sert à repérer les événements ; chaque système est une division particulière de l'Univers en espace et en temps.

L'espace reste toujours l'ensemble des événements simultanés ; c'est une "coupe de l'Univers à temps donné" (P. Langevin). Cette définition s'applique à l'ancienne conception de l'espace et à celle d'aujourd'hui, mais la différence est profonde la conception compatible avec la mécanique newtonienne admettait un temps universel, et la coupe était la même pour tous les systèmes, il n'y avait qu'une division de l'Univers en espace et en temps - d'où la possibilité d'envisager séparément l'espace et le temps - la forme des corps était la même pour tous les observateurs.

Dans l'Univers de Minkowski, la simultanéité étant relative, la coupe à temps donné dépend du système de reférence : *la forme des corps n'est plus invariable, il y a une infinité d'espaces euclidiens dans l'Univers "euclidien" unique a quatre dimensions* (comme en géométrie il y a une infinité de plans dans l'espace euclidien à trois dimensions).

## 5.2 Propriétés des couples dévénements (P. Langevin)

Soient A et B deux événements. Trois cas peuvent se présenter, le carré $s^2$ de l'intervalle est négatif, nul, ou positif.

1. COUPLES DANS L'ESPACE : Si $s^2$ est négatif,cela veut dire dans tous les systèmes de référence, la distance $l$ des points où se produisent ces événements est plus grande que le trajet $cT$ que parcourt la lumière dans l'intervalle de temps qui les sépare.

   Une application simple des formules de Lorentz permet d'établir que *deux tels événements n'ont pas un ordre de succession déterminé*. Il existe une infinité de systèmes de référence dans lesquels $A$ est antérieur à $B$, une infinité de systèmes dans lesquels $A$ est, au contraire, postérieur à $B$,enfin un système dans lequel $A$ et $B$ sont simultanés.

*La distance spatiale de ces deux événements est minimum dans le système pour lequel ils sont simultanés* car $s^2 = c^2T^2 - t^2$ étant constant, $l^2$ est minimum lorsque $T$ est nul.

Deux tels événements qui, par un choix convenable de la division de l'Univers en espace et en temps peuvent être amenés en coïncidence dans le temps, mais jamais dans l'espace, forment un couple d'événements dans l'espace.

Deux événements constituant un couple dans l'espace sont absolument indépendants, car s'il existait entre eux un lien de cause à effet, comme leur ordre de succession n'est pas déterminé, la cause serait, pour certains observateurs, postérieure à l'effet, ce qui est absurde comme dit M. Einstein "on ne peut pas télégraphier dans le passé"

2. COINCIDENCE ABSOLUE. Lorsque $s$ est nul, on a dans tous les systèmes $l = cT$ ; c'est le cas qui se présente pour deux "points d'Univers" d'un rayon lumineux, puisque le trajet $l$ parcouru par la lumière (dans le vide) pendant le temps $T$ est précisément $cT$. Dans le cas où $l$ et $T$ sont nuls tous deux dans un système, ils sont nuls dans tous les systèmes ; les deux événements sont en coïncidence absolue.

3. COUPLES DANS LE TEMPS. Lorsque l'invariant $s^2$ est positif, la distance spatiale $l$ est, dans tous les systèmes de référence, plus courte que le trajet $cT$ de la lumière pendant la durée écoulée entre les deux événements. Le calcul montre que l'ordre de succession des deux événements considérés a un sens bien déterminé. On ne peut jamais les rendre simultanés, c'est-à-dire trouver un système de référence pour lequel ils soient en coïncidence dans le temps ; mais on peut les amener en coïncidence dans l'espace, et la durée $T$ qui les sépare est minimum dans ce système pour lequel ils coïncident dans l'espace.

   Deux événements pour lesquels $s^2$ est positif forment un couple dans le temps. Ils peuvent être unis par un lien de causalité ; ils peuvent aussi, bien entendu, être indépendants, mais toujours le premier événement a pu être annoncé au lieu où le second va se produire, puisque la distance spatiale qui les sépare est, dans tous les systèmes, plus courte que le trajet $cT$ que parcourt, dans le temps $T$, un signal lumineux ou électromagnétique.

L'invariant $s^2$ est donc positif ou négatif suivant qu'un des événements peut ou non influer sur l'autre ; il indique la "possibilité d'influence ou d'action" d'un des événements sur l'autre (M. P. Langevin).

## 5.3 La contraction des longueurs

Dans deux systèmes de référence en mouvement relatif, prenons des axes ayant la disposition simple que nous avons adoptée (1.4). Imaginons une tige, parallèle aux axes $Ox$, $O'x'$, immobile dans le système $S'$ et par conséquent se déplaçant, dans le système S, avec la vitesse v dans le sens de sa longueur.

Prenons comme événements $A$ et $B$ les positions des extrémités de la tige à un même instant pour l'observateur du système $S$ ; ces deux événements étant en coïncidence dans le temps pour le système $S$ forment, d'après ce qui a été dit plus haut, un couple dans l'espace, et leur distance spatiale est minimum dans le système $S$ où ils sont simultanés.

Pour l'observateur du système $S$, la distance spatiale des positions simultanées des extrémités de la tige est la longueur de cette tige ; la tige est donc plus courte pour l'observateur du système $S$ que pour l'observateur du système $S'$ pour qui les événements $A$ et $B$ ne sont plus simultanés.

Ainsi, pour l'observateur $S$ qui voit passer la tige, celle-ci est plus courte que pour l'observateur $S'$ pour qui la tige est immobile ; il est facile de calculer (appendice, note 7) que le rapport entre les longueurs de la tige animée de la vitesse $v$ et de la même tige au repos est $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

C'est précisémènt la contraction de Fitzgerald-Lorentz (chap. 2) mais ici cette contraction n'a plus aucun caractère absolu, et elle ne prête plus aux objections que nous avons faites. En somme, elle résulte simplement de la manière différente dont les deux observateurs envisagent la simultanéité, et du fait que la forme d'un corps en mouvement ne peut être définie que comme l'ensemble des positions simultanées des différents points de ce corps.

La contraction est tellement peu absolue, qu'elle est réciproque, c'est-à-dire que si deux tiges identiques sont immobiles, l'une dans le système $S$ l'autre dans le système $S'$, chaque observateur estime que la tige de l'autre système est plus courte que celle de son système.

Le fait qu'un objet en mouvement est contracté dans le sens du mouvement ne signifie donc pas que l'objet a été réellement modifié par le mouvement ; il signifie qu'un observateur lié à l'objet et un observateur en mouvement par rapport à l'objet ne font pas la même décomposition de l'Univers en espace et en temps, que l'espace relatif à l'objet et l'espace relatif à l'observateur qui le voit passer ne sont pas les mêmes (ainsi que nous l'avions fait pressentir, page 30).

## 5.4 La dilatation du temps (Einstein)

La contraction des longueurs a une contre-partie, la dilatation du temps. Le calcul montre (appendice, note 7) que, pour les observateurs immobiles dans un des systèmes $S$ ou $S'$, les horloges de l'autre système retardent : chaque observateur,dans son système, divise par $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ les intervalles de temps mesurés par une horloge au repos dans l'autre système.

## 5.5 Les lignes d'univers (Minkowski)

Suivons maintenant la succession continue des événements qui constituent la vie d'une même portion de matière ou d'un même être. Leur ensemble forme dans l'Espace-Temps une ligne d'Univers, comme en géométrie une succession continue de points forme une ligne dans l'espace.

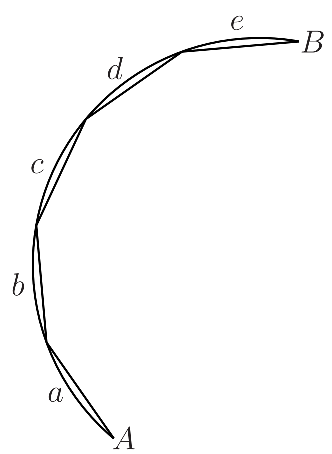


FIGURE 5.1 –

En géométrie, pour mesurer un arc de courbe $AB$, on décompose cet arc en cordes rectilignes très petites, et l'on fait la somme de ces petites cordes Aa, ab, bc, etc...(5.1) ; plus les cordes sont petites (et en même temps, bien entendu, plus grand est leur nombre), plus la somme de leurs longueurs est voisine de la longueur de l'arc de courbe, ce qu'on exprime en disant que la longueur de l'arc $AB$ est l'intégrale, prise de $A$ à $B$, des cordes infiniment petites. On a l'habitude de désigner une intégrale ou sommation de quantités infiniment petites (en nombre infini) par le signe $\int$ et l'on écrit

$$\text{arc } AB = \int_A^B \mathrm{d}l \tag{5.3}$$

en désignant par d$l$ l'une quelconque des cordes infiniment petites [1], ou ce qui revient au même, un arc de courbe élémentaire, car l'arc de courbe et la corde rectiligne entre deux points tendent a avoir la même longueur si les deux points se rapprochent indéfiniment. Ainsi, il est bien entendu que le symbole $\int_A^B \mathrm{d}l$ signifie la somme des cordes infiniment petites, ou ce qui est la même chose la somme des arcs de courbe élémentaires, depuis le point A jusqu au point B.

Opérons de la même manière pour une ligne d'Univers quadridimensionnelle : entre deux points-événements $A$ et $B$ de cette ligne, nous décomposons la succession continue d'évènements en "intervalles" d$s$ infiniment petits, dans chacun desquels le mouvement de la portion de matière envisagée peut être considéré comme rectiligne et uniforme (de même qu'en géométrie chaque arc élémentaire peut être confondu avec la corde rectiligne).

D'après ce que nous avons vu au début de ce chapitre, chacun de ces intervalles élémentaires est un invariant ( comme en géométrie la longueur des cordes infiniment petites est indépendante du système de coordonnées). La longueur de l'arc de ligne d'univers, qui est la somme des intervalles infiniment petits, c'est-à-dire l'intégrale

$$I = \int_A^B \mathrm{d}s \tag{5.4}$$

étendue à tous les couples d'evénements infiniment voisins qui se succèdent d'une manière continue le long de la ligne d'Univers, a donc une valeur indépendante du système de référence.

Prenons comme système de référence un système lié à la portion de matière considérée : dans ce système, tous les événements concernant cette portion de matière sont fixes dans l'espace, puisqu'ils occupent la même position par rapport aux axes du système ; donc, puisqu on peut les amener en coïncidence dans l'espace, pris deux à deux ils constituent des couples dans le temps. Par suite leur ordre de succession ne peut être inversé : le passé, le présent et l'avenir gardent un ordre immuable pour les événements concernant un même objet ou un même être.

1. La lettre d qui précède une autre lettre désignant une grandeur est le symbole employé pour indiquer que la grandeur considérée est infiniment petite. Les formules contenant des grandeurs infiniment petites ne sont pas rigoureuses pour des grandeurs très petites, mais elles sont d'autant plus approchées que ces grandeurs sont plus petites ; elles sont donc valables à la limile, pour des grandeurs infiniment petite.

## 5.6 Le temps propre (Minkowski)

Sur la ligne d'Univers d'une portion de matière, choisissons deux événements infiniment voisins, séparés par un intervalle d'Univers d$s$ (infiniment petit) ; soient d$l$ leur distance spatiale (infiniment petite) et d$t$ l'intervalle de temps (infiniment court) qui s'écoule entre eux, dans un système de référence quelconque. Nous avons, d'après la définition même de l'intervalle (5.1),

$$ds^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2 = \text{invariant} \tag{5.5}$$

Dans le système de référence lié à la portion de matière, d$l$ est nul ; soit d$\tau$ l'intervalle de temps dans ce système

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}\tau^2 \text{ ou } \mathrm{d}s = c\mathrm{d}\tau \tag{5.6}$$

et, par intégration entre deux événements $A$ et $B$ quelconques pris sur la ligne d'Univers

$$\text{arc de ligne d'Univers} = \int_A^B \mathrm{d}s = c\int_A^B \mathrm{d}\tau \tag{5.7}$$

d$\tau$ est l'élément de temps propre de la portion de matière considérée et de tout le système qui lui est lié. Le temps propre total $\int_A^B \mathrm{d}\tau$ écoulé entre deux événements $A$ et $B$ est le temps que mesurera un observateur, c'est le temps qu'enregistreront les horloges dans ce système. Ce temps propre est indépendant de tout système de référence.

Ainsi *une horloge liée à un mobile* (dont le mouvement n'a plus besoin ici d'être soumis à la restriction de la translation uniforme) *mesure la longueur, divisée par c, de l'arc de ligne d'Univers de ce mobile.*

Nous avons vu que lorsque deux événements forment un couple dans le temps, la durée qui les sépare est minimum dans le système pour lequel ils sont en coïncidence dans l'espace ; le temps propre jouit donc de cette propriété de minimum, il est plus court que le temps évalué dans tout système en translation uniforme.

On démontre (appendice, note 8) que si un mobile est animé d'une vitesse $v$ dans un système $S$ en translation uniforme, l'élément de temps propre d$\tau$ écoulé entre deux événements infiniment voisins pris sur sa ligne d'Univers est lié à l'élément de temps d$t$ mesuré entre les deux mêmes événements dans le système $S$, par la relation

$$\mathrm{d}\tau = \alpha\mathrm{d}t\ ,\ \left(\alpha = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \tag{5.8}$$

Le coefficient $\alpha$ est d'autant plus petit que la vitesse $v$ est plus voisine de la vitesse de la lumière. *Le temps propre est donc d'autant plus court (par rapport au temps du système $S$ en translation uniforme) que la vitesse du mobile dans le système $S$ est plus grande.*

On démontre encore (note 8) qu'entre deux événements déterminés, la plus longue ligne d'Univers est celle qui correspond au mouvement rectiligne et uniforme. Il n'y a pas de ligne de plus courte distance, mais il existe une infinité de lignes d'Univers de longueur nulle, qui correspondent à toutes les trajectoires imaginables des rayons lumineux entre les deux événements (pour un rayon lumineux, on a toujours $\mathrm{d}l = c\,\mathrm{d}t$ et par conséquent $\mathrm{d}s = 0$).

D'étranges conséquences se déduisent de ces résultats.

1. Dans un système en translation uniforme - la terre par exemple, car son accélération est négligeable deux horloges identiques et synchrones sont au même endroit. On déplace l'une très rapidement et on la ramène près de l'autre au bout du temps $t$ (temps du système) ; le temps propre de l'horloge qu'on a déplacée, à laquelle on a fait subir une accélération, ayant été plus court que le temps du système uniforme, cette horloge se trouve en retard sur l'autre horloge, de $t - \int_0^t \alpha dt$. C'est l'accélération qui a créé la dissymétrie ; on reconnaît ici le caractère absolu de l'accélération signalé à la fin du chapitre I.

2. Dans les mêmes conditions, un échantillon de matière radioactive aura moins évolué que celui qui n'a pas été déplacé, qui n'a pas subi d'accélérations (M. Langevin).

3. Avec M. Langevin, imaginons qu'un observateur ait une machine lui permettant de quitter la terre et d'atteindre une vitesse fantastique. Supposons, pour fixer les idées, que cette vitesse soit inférieure de seulement $\frac{1}{20000}$ à la vitesse de la lumière. Pendant un an, le voyageur s'éloigne de la terre et il revient au bout de deux ans ; il n'a vieilli que de deux ans, car il a vécu le temps propre de son système [2], temps enregistré par ses horloges. Cependant, à son retour, il trouve sur la terre d'autres générations, et il apprend qu'il est parti depuis 200 ans. Il s'est transporté dans l'avenir de la terre, mais sans retour possible dans le passé.

   Ces chiffres supposent que la vitesse a été atteinte très rapidement, ce qui serait évidemment impossible, même si l'homme disposait d'une

2. Nous posons en principe que la vie est constituée par une succession de phénomènes physico-chimiques qui se ramènent tous à des mouvements de molécules et d'électrons ; ces mouvements se succèdent dans le temps propre du voyageur, temps qui, entre deux événements communs au système du voyageur et au système terrestre (le départ et le retour) est, d'après ce qui a été dit plus haut. plus court que le temps terrestre.

énergie suffisante, car la force d'inertie due à l'accélération serait telle que le voyageur serait écrasé. Toutefois, cet exemple met admirablement en évidence la relativité du temps.

Pour un mobile qui serait animé de la vitesse de la lumière (c'est-à-dire dont la ligne d'Univers serait de longueur nulle), le cours du temps serait suspendu.

## 5.7 La loi d'inertie

Nous avons déjà, au chapitre I, énoncé la loi d'inertie de Galilée : un mobile libre est animé, d'un mouvement rectiligne et uniforme. D'autre part, nous venons de voir que la ligne d'Univers la plus longue entre deux événements déterminés est celle qui correspond à un mobile allant d'un événement à l'autre d'un mouvement rectiligne et uniforme. Nous pouvons donc donner à la loi de Galilée la forme suivante : entre deux événements concernant un mobile sur lequel n'est appliquée aucune force, la ligne d'Univers la plus longue est précisément la ligne d'Univers de ce mobile ; ou encore, *la loi d'inertie est la loi du temps propre maximum.*

Le mouvement rectiligne et uniforme joue, dans l'Univers de Minkowski, le rôle que joue la ligne droite en géométrie euclidienne, avec cette différence que la ligne d'Univers qui se traduit à nous par ce que nous appelons l'état de mouvement rectiligne et uniforme entre deux, événements est la ligne d'Univers la plus longue, alors qu'en géométrie la ligne droite tracée entre deux points est la ligne la plus courte. Cependant, dans un cas comme dans l'autre, on peut donner un même énoncé (voir appendice, note 9) et la ligne du point matériel libre, *dans un Univers régi par les formules de Lorentz*, peut être qualifiée de droite d'Univers, car elle présente une analogie frappante avec la droite de la géométrie euclidienne.

# Chapitre 6

# Dynamique de la relativité

A la cinématique définie par le groupe de transformations de Lorentz, qui remplace la cinématique ancienne basée sur le groupe de Galilée, correspond une dynamique nouvelle, qui, fait remarquable, est plus cohérente et plus simple que la dynamique newtonienne. Nous nous bornerons ici à indiquer les résultats. Un aperçu général de la théorie est donné dans la note 10 de l'appendice.

## 6.1 La masse fonction de la vitesse

Dans la dynamique ancienne, la masse newtonienne d'une portion de matière est une grandeur invariable (chap. 1). Dans la dynamique nouvelle, deux observateurs en mouvement l'un par rapport à l'autre ne doivent pas attribuer la même masse à une même portion de matière. La masse d'un corps est relative comme sa vitesse, et dans un système de référence déterminé, la masse augmente avec la vitesse.

Si l'on conserve la définition de la masse (coefficient d'inertie) donnée au chapitre 1, on trouve qu'il faut envisager deux masses : une masse longitudinale, qui intervient si la force agissante (et par suite l'accélération) est dirigée parallèlement à la vitesse acquise ; une masse transversale dans le cas où la force agit normalement à la trajectoire ; ces deux masses augmentent avec la vitesse de la portion de matière considérée, mais suivant des lois différentes ; elles ne sont égales que si la portion de matière est au repos.

Une autre définition de la masse permet de ne conserver qu'une seule masse. Supposons qu'une force $F$ constante agisse pendant un temps $t$ sur une portion déterminée de matière initialement au repos ; au bout du temps $t$ cette force a imprimé à la matière une vitesse $v$. Le produit de la force $F$ par le temps $t$ est ce qu on appelle l'*impulsion* communiquée à la portion de matière ; divisons cette impulsion par la vitesse. nous obtenons la *masse maupertuisienne* $m = \frac{F\,t}{v}$. Le produit $mv$, égal à l'impulsion $F\,t$, se nomme encore *quantité de mouvement.*

La masse est donc définie comme coefficient de proportionnalité entre l'impulsion communiquée et la vitesse acquise, comme *capacité d' impulsion* et non plus comme coefficient d' inertie. Dans l'ancienne dynamique, il y avait identité entre les deux définitions ; dans la dynamique de la relativité, la masse maupertuisienne se confond avec la masse newtonienne transversale, mais non avec la masse newtonienne longitudinale.

Nous appellerons donc dorénavant "masse", la capacité d'impulsion qui est indépendante de la direction suivant laquelle la force agit sur la portion de matière. On démontre que cette *masse croît avec la vitesse* $v$ suivant la loi extrêmement simple

$$m = \frac{m_0}{\alpha}, \qquad \left(\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) \tag{6.1}$$

$m_0$ est une constante, la masse pour $\alpha = 1$ ou $v = O$, c'est-à-dire la *masse initiale* ou *masse au repos* ; c'est la valeur vers laquelle tend la masse quand la vitesse tend vers zéro.

Supposons que la vitesse d'un corps, mesurée dans un système de référence déterminé, aille constamment en augmentant ; à mesure que $v$ tend vers la vitesse $c$ de la lumière, $\alpha$ tend vers zéro et $m$ croît indéfiniment ; la masse de toute portion de matière serait infinie si cette portion de matière était animée de la vitesse de la lumière. On voit encore de cette manière que la vitesse de la lumière est une vitesse limite qu'on ne saurait communiquer à aucune particule matérielle, car il faudrait fournir une énergie infinie.

## 6.2 L'énergie et ses diverses formes

On appelle *travail* le produit d'une force par le déplacement de son point d'application dans la direction et le sens de la force, et *énergie* toute cause de production de travail ou inversement tout résultat de la transformation d'un travail. Le travail et l'énergie ont même mesure : dans le système C. G. S. (centimètre, gramme, seconde), l'unité est l'erg : c'est travail accompli par une force égale à une dyne (la 981$^e$ partie du poids du gramme) pour un déplacement de 1 centimètre dans la direction et le sens de la force.

On distingue deux catégories d'énergie : *l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.*

L'énergie cinétique estl'énergie de mouvement. Un corps en mouvement possède, de ce fait, de l'énergie cinétique. En mécanique classique, l'energie cinétique d'une portion de matière (point matériel) de masse $m$ et de vitesse $v$ est sa *force vive* $\frac{1}{2}mv^2$, et l'énergie cinétique d'un système matériel est la somme $\frac{1}{2}\sum mv^2$ des forces vives des différents points matériels qui composent ce système. Nous verrons bientôt que cette expression ancienne de l'energie cinétique n'est valable que comme approximation.

L'énergie potentielle est de lénergie en réserve, en puissance. Un exemple fera comprendre : si l'on soulève un objet, on dépense du travail ; ce travail n'est pas perdu, il est transformé en énergie potentielle ; en effet si on lâche l'objet, celui-ci tombe ; il y a donc quelque chose qui se transforme en énergie cinétique qui peut elle-même produire du travail.

Dans la nature, l'énergie se présente sous des formes variées. Tout champ de force renferme de l'énergie localisée dans chaque élément de volume de l'espace.

### 6.2.1 Énergie électrostatique

Si l'on met en présence un certain nombre de corps électrisés, ceux-ci exercent des forces les uns sur les autres ; le système possède de l'énergie potentielle ; on modifie cette énergie en changeant les distances des charges électriques, c'est-à-dire en dépensant (ou au contraire en récupérant) du travail. Ainsi un champ électrique, c'est-à-dire une portion d'espace où s'exercent des forces électriques possède une énergie potentielle, et l'on démontre que cette énergie est localisée dans chaque élément de volume du champ.

### 6.2.2 Énergie magnétique

De même, chaque élément de volume d'un champ magnétique renferme de l'énergie, mais cette fois c est de l'énergie cinétique, car tout champ magnétique est produit par des charges (électrons) en mouvement (même un aimant renferme des charges en mouvement), et l'on sait aujourd'hui que l'énergie magnétique n'est autre chose que l'énergie cinétique de ces charges, qui est extériorisée dans l'espace environnant.

### 6.2.3 Énergie du champ de gravitation

Les corps s'attirent et un système matériel possède, de ce fait, une énergie potentielle.

### 6.2.4 Énergie chimique

Un système de deux corps susceptibles de s'unir possède de l'énergie potentielle, qui peut être transformée en chaleur et en travail lors de la combinaison de ces corps. L'énergie des explosifs est encore une forme d'énergie chimique.

### 6.2.5 Énergie calorifique

Enfin la chaleur est une des formes de l'énergie : c'est l'énergie (cinétique) du mouvement des molécules qui composent la matière.

## 6.3 Conservation de l'énergie

Un principe fondamental est celui de la conservation de l'énergie. Chaque fois que de l'énergie ou du travail se transforme, il y a production d'une énergie égale ou d'un travail équivalent. Voici deux exemples : quand on soulève un poids, l'accroissement d'énergie potentielle (énergie de gravitation) est égal au travail dépensé. Quand un corps perd sa vitesse par suite d'un frottement, toute son énergie cinétique se transforme en une quantité égale d'énergie calorifique, ou en une quantité égale d'énergie calorifique et d'énergie électrique (due à l'électrisation par frottement).

L'énoncé exact du principe est le suivant. L'énergie totale d'un système matériel *isolé* ( c'est-à-dire qui n'échange aucune énergie ni aucune matière avec l'extérieur) reste constante au cours des transformations que subit ce système.

## 6.4 L'inertie de l'énergie

Une des conséquences les plus remarquables de la théorie de la relativité est que la *notion de masse n'est pas distincte de celle d'énergie.*

On démontre en effet les résultats suivants :

1. L'énergie cinétique acquise par une particule matérielle, de masse au repos $m_o$ et de masse $m$ pour une vitesse $v$, s'obtient en multipliant la variation de masse $(m-mo)$ par le carré de la vitesse de la lumière. C'est seulement en première approximation (pour les vitesses faibles) que cette énergie est égale à $\frac{1}{2}m_ov^2$ (force vive dans la mécanique classique).
2. L'énergie rayonnante (chaleur rayonnante, lumière, ondes hertziennes) possède une masse. Une quantité d'énergie $W$ a une masse égale au

quotient de cette énergie par le carré de la vitesse de la lumière :

$$m = \frac{W}{c^2} \tag{6.2}$$

3. Un corps qui rayonne (ou qui absorbe) de l'énergie, chaleur, lumière, etc..., éprouve une perte (ou une augmentation)de masse égale au quotient de l'énergie rayonnée ou absorbée)par le carré de la vitesse de la lumière. En d'autres termes, en vertu du résultat qui précède, la masse de l'énergie rayonnée (ou absorbée) se trouve perdue (ou acquise) par la matière.

4. On sait que la matière est constituée par des corpuscules électrisés auxquels on a donné le nom d'électrons. M. Langevin a établi que l'énergie (potentielle) totale d'un électron au repos est égale à la masse au repos de l'électron, multipliée par le carré de la vitesse de la lumière. Ce résultat s'étend à toute la matière, si, comme on a toutes raisons de le penser, la matière est entièrement formée d'électrons positifs et négatifs.

   Réunissant tous ces résultats, les conclusions suivantes s'imposent :

   *Toute variation d'énergie* (potentielle ou cinétique) *d'un système* (formé de matière. champs électromagnétiques. rayonnements, etc.) *est accompagnée d'une variation de masse de ce système, égale au quotient de la variation d' energie par le carré de la vitesse de la lumière.*

   *Toute forme d'énergie possède de l'inertie ; la masse de la quantité d'énergie $W$ est $\frac{W}{c^2}$*

   *Toute masse $m$ représente une énergie totale $mc^2$.*

## 6.5 Quelques conséquences de l'inertie de l'énergie (M. Langevin)

### 6.5.1 Variation de la masse avec la température

Une quantité d'eau dont la masse est égale à 1 gramme à la température de $0^o$ doit avoir à $100^o$ une masse plus grande. La différence ($5\ 10^{-12}$ gramme) est d'ailleurs insensible. Malgré la petitesse de cet effet, l'exemple fait comprendre que *la notion de masse cesse de se confondre avec celle de quantité de matière.*

### 6.5.2 Réactions chimiques

De la chaleur étant mise en jeu dans les réactions chimiques, comme cette chaleur a une masse, la masse du composé n'est pas rigoureusement égale à la somme des masses des composants. Par exemple, lorsque 2 grammes d'hydrogène s'unissent à 16 grammes d'oxygène, il se dégage sous forme de chaleur une énergie égale à $2,87\ 10^{12}$ ergs. On n'obtient pas 18 grammes d'eau, mais $\frac{2{,}87\ 10^{12}}{9\ 10^{20}} = 3,2\ 10^{-9}$ gramme en moins.

### 6.5.3 Transformations radioactives

Dans les transformations radioactives, l'énergie libérée est considérablement plus grande que dans les réactions chimiques. Par exemple, la masse globale de l'hélium et du plomb engendrés par transformation complète d'une certaine quantité d'uranium est certainement inférieure de plus de $\frac{1}{10000}$ à la masse de cette quantité d'uranium.

Prout a émis l'hypothèse que les divers atomes sont construits à partir d'un élément primordial, l'hydrogène. Cette hypothèse de l'unité de la matière est de plus en plus confirmée par les découvertes récentes [1] : par exemple, Sir Rutherford a montré que le choc d'une particule $\alpha$ (atome d'hélium lancé par un corps radioactif) contre un atome d'azote peut détacher de celui-ci un atome d'hydrogène. D'après la mécanique ancienne, la masse d'un atome quelconque devrait alors être un multiple exact de celle de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire que les poids atomiques, calculés en prenant pour unité celui de l'hydrogène, devraient être des nombres entiers. C'est la loi de Prout, qui est effectivement à peu près vérifiée car les poids atomiques sont voisins de nombres entiers ; cependant il subsiste des écarts :

Lithium 6,94, bore 10,90, carbone 11.91, etc.

M. Langevin a proposé l'explication suivante : la formation des atomes (par désintégration radioactive ou par un processus inverse non encore observé, mais qui s'est cessairement produit dans la formation des atomes lourds) a été accompagnée de variations d'energie interne par émission ou absorption de rayonnement. La masse de l'énergie rayonnée ou absorbée est la cause des écarts [2], et ceux-ci sont tels que les énergies mises en jeu seraient

1. Il est probable que le noyau atomique de l'hydrogène est l'électron positif, de masse 1700 fois plus grande que la masse de l'électron négatif. On a toutes raisons de penser que l'atome d'hydrogène est formé d'un électron positif et d'un électron négatif gravitant autour du premier.

2. Il faut toutefois noter que d'autres écarts sont dus à l'existence de mélanges de corps isotopes, ayant mêmes propriétés chimiques mais des poids atomiques différents. Tel est le cas, par exemple, pour le chlore (35,5) qui est un mélange de deux corps de poids atomiques 35 et 37.

du même ordre de grandeur que celles observées au cours des transformations radioactives.

## 6.6 La matière réservoir d'énergie

Soient $m_0$ la masse au repos d'un corps, $m$ sa masse pour les observateurs relativement auxquels il possède la vitesse $v$ ; l'énergie totale du corps, pour ces observateurs, est :

$$W = m\,c^2 = \frac{m_0\,c^2}{sqrt1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0\,c^2 + \frac{1}{2} m_0\,v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots \qquad (6.3)$$

Le second terme et les suivants (en nombre infini), qui contiennent les puissances supérieures de $v$, représentent l'énergie cinétique due à la vitesse $v$ (relativement aux observateurs considérés). Cette énergie croît indéfiniment lorsque la vitesse $v$ tend vers la vitesse de la lumière. Pour les faibles vitesses elle se réduit pratiquement au second terme $\frac{1}{2} m_0\,v^2$ (expression ancienne de la force vive).

Le premier terme $m_0 c^2$ est l'énergie que renferme la matière au repos ; c'est la somme des énergies cinétiques et potentielles des particules électrisées (électrons) qui, en dernière analyse, composent la matière. Cette énergie est fantastique ! un seul gramme de matière, quelle que soit la nature de celle-ci, correspond à la présence d'une énergie interne égale à $9\ 10^{20}$ ergs, énergie qui permettrait de soulever trente millions de tonnes au sommet de la tour Eiffel.

Presque toute cette énergie interne appartient aux noyaux atomiques, qui sont des mondes insensibles à la plupart des actions que nous pouvons produire[3]. Une très faible partie de l'énergie des noyaux est libérée spontanément dans les transformations radioactives. Une portion d'énergie beaucoup plus petite encore, provenant, non plus des noyaux des atomes, mais des électrons qui gravitent autour de ces noyaux est dégagée dans le rayonnement (chaleur rayonnante, lumière, rayons X) ou mise en jeu dans les réactions chimiques.

3. Sauf cependant aux rayons alpha (expériences récentes de Sir Rutherford).

## 6.7 Le principe de la conservation de la masse se confond avec le principe de la conservation de l'énergie

Dans un système isolé, les diverses parties échangent de l' energie entre elles ;les masses individuelles des corps ne se conservent donc pas ; seule la masse de l'ensemble reste invariable. Le principe de la conservation de la masse n'est pas distinct du principe de la conservation de l'énergie, puisque la masse de toute substance mesure son énergie totale.

## 6.8 Unification des principes de conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement Conservation de l'impulsion d'univers

Dans la mécanique classique, en plus des deux principes de conservation de la masse et de l'énergie, qui apparaissaient comme distincts, mais qui deviennent identiques dans la dynamique nouvelle, il existe un troisième principe : celui de la conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé. Nous avons vu que la quantité de mouvement d'une particule de matière est le produit $mv$ de la masse de cette particule par sa vitesse. C'est une quantité orientée comme la vitesse, un vecteur. Tout vecteur peut être représenté géométriquement par une portion de droite $OM$ (fig. 6.1) ayant la direction et le sens du vecteur, et dont la longueur $OM$ est proportionnelle à la grandeur du vecteur. On peut projeter le vecteur en $OA$, $OB$, $OC$ sur les directions des axes de coordonnées ; l'ensemble des trois vecteurs $OA$, $OB$, $OC$, qui sont les composantes du vecteur $OM$, est entièrement équivalent à ce vecteur $OM$. C'est ainsi qu'on décompose les déplacements rectilignes en géométrie, les vitesses en cinématique, les forces et les quantités de mouvement en dynamique. Par la construction inverse, on peut composer en un vecteur unique $OM$ trois vecteurs $OA$, $OB$, $OC$ de même nature dirigés parallèlement aux axes de coordonnées.

Considérons un système de points matériels ; projetons sur les axes de coordonnées les quantités de mouvement de tous les points, puis ajoutons toutes les composantes suivant $Ox$, toutes les composantes suivant $Oy$, toutes les composantes suivant $Oz$, nous obtenons trois grandeurs $Gx$, $Gy$, $Gz$ qui sont les composantes d'un vecteur. la quantité de mouvement du système matériel. Nous avons ainsi composé en un vecteur unique l'ensemble des vecteurs

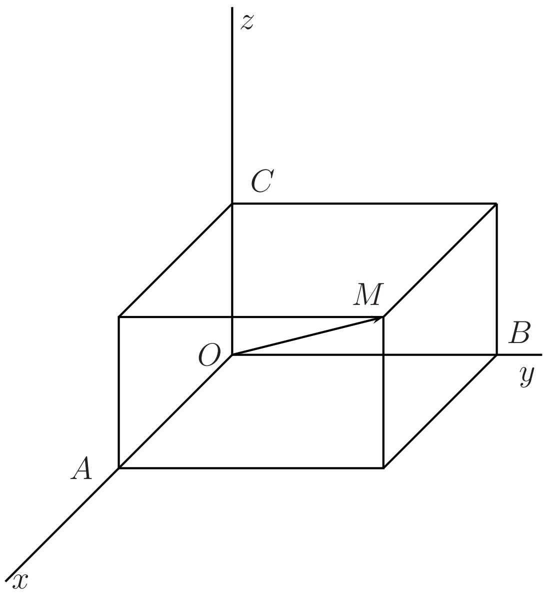


FIGURE 6.1 –

quantités de mouvement de tous les points matériels du système.

Le principe de la conservation de la quantité de mouvement affirme que dans un système de points matériels isolé qui évolue, la quantité de mouvement de l'ensemble reste la même, c'est-à-dire que les projections $Gx$, $Gy$, $Gz$ restent constantes dans un même système d'axes de coordonnées.

Lorsque, dans un même système de référence, on change d'axes de coordonnées, les composantes d'un vecteur quelconque prennent de nouvelles valeurs ; il est évident que les composantes d'un vecteur se transforment suivant la même loi qu'une distance orientée (déplacement rectiligne) puisqu'un vecteur se représente géométriquement par une portion de droite dirigée. Réciproquement, trois grandeurs physiquement de même nature (homogènes) qui, dans un changement d'axes de coordonnées, se transforment comme les composantes d'un déplacement rectiligne, constituent les trois composantes d'un vecteur d'espace.

Nous allons généraliser ces notions et les étendre à l'Espace-Temps. Au lieu d'une distance, considérons un intervalle d'Univers $s$

$$s^2 = -l^2 + c^2\,T^2 = -(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 + c^2\,(t_2 - t_1)^2 \quad (6.4)$$

$x_1$, $y_1$, $z_1$, $t_1$ ; $x_2$, $y_2$, $z_2$, $t_2$ étant les coordonnées d'espace et de temps des deux événements origine et extrémité de l'intervalle s.

De même que la distance de deux points $A$ et $B$ est orientée dans l'espace, de même l'intervalle qui sépare deux événements est orienté dans I'espace-temps.

$x_2-x_1$, $y_2-y_1$, $z_2-z_1$ sont, comme en géométrie, les composantes, suivant les axes de coordonnées, de la distance spatiale des deux événements ; quant à $c(t_2-t_1)$, nous pouvons dire que c'est la composante de l'intervalle suivant le temps.

Par conséquent $x_2-x_1$, $y_2-y_1$, $z_2-z_1$, $c\,(t_2-t_1)$ sont les composantes d'espace et de temps de la portion de droite d'Univers qui sépare les deux événements. Une portion de droite d'Univers, ou ce qui est la même chose un déplacement rectiligne effectué d'un mouvement uniforme est un vecteur d'Univers à quatre dimensions, un quadrivecteur.

Par extension des propriétés des vecteurs de l'espace, lorsque quatre grandeurs physiquement de même nature se transforment, dans un changement du système de référence, comme les composantes d'une portion de droite d'Univers, c'est-à-dire (dans le cas de la relativité restreinte et avec la disposition d'axes adoptée) conformément aux formules de Lorentz, ces grandeurs constituent les composantes d'un quadrivecteur.

Un fait remarquable est que les trois composantes d'espace de la quantité de mouvement d'une portion de matiere et sa masse multipliée par la vitesse de la lumière (c'est-à-dire son énergie totale divisée par la vitesse de la lumière) sont quatre grandeurs jouissant de la propriété precédente. Ce sont les composantes d'un quadrivecteur, *l'impulsion d'Univers.*

Ce vecteur d'Univers a ainsi pour composantes d'espace les trois quantités de mouvement suivant les directions des trois axes de coordonnées, et, pour composante de temps l'énergie (divisée par c) qui n'est pas orientée dans l'espace mais qui est orientée suivant le temps.

La quantité de mouvement et l'énergie (ou la masse) d'un système matériel apparaissent donc comme des grandeurs inséparables, et les trois principes de la mécanique ancienne se réduisent maintenant à un principe unique : *la conservation de l'impulsion d'Univers.*

Alors que la quantité de mouvement et l'énergie, considérées séparément, ne se conservent que dans un même système de référence et changent d'un système de référence à l'autre, *l'impulsion d'Univers a un sens absolu*, indépendant du système de référence. On voit que seul l'ensemble des principes de la dynamique est absolu.

Loin de compliquer les lois de la nature, le principe de relativité, par sa puissance de simplification, conduit à une synthèse sur la beauté de laquelle il serait superflu d'insister .

# Chapitre 7

# Vérifications expérimentales

## 7.1 Les vitesses des électrons

La théorie de la relativité affirme que la vitesse de la lumière ne peut pas être dépassée. Cette affirmation est la base même de la théorie, car c'est elle qui entraîne la négation du temps absolu.

Les vitesses les plus rapides que nous connaissions sont celles des particules (électrons) émises par les corps radioactifs. Danysz a montré que ces particules présentent toute une série de vitesses et il est remarquable que ces vitesses convergent vers la vitesse de la lumière, allant jusqu'à 297000 kil./sec, sans pouvoir atteindre 300000 kil./sec.

## 7.2 Vérification de la loi d'accroissement de la masse avec la vitesse

Les expériences de M. Kaufmann et de M. Bücherer sur les rayons $\beta$ des corps radioactifs et surtout les mesures très précises de MM. Ch.-Eug. Guye et Lavanchy sur les rayons cathodiques (formés d'électrons animés de grandes vitesses) ont prouvé que la masse de l'électron augmente avec sa vitesse, conformément à la loi prévue $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Dans ces dernières expériences la loi est vérifiée jusqu'à des vitesses allant jusqu'à la moitié de la vitesse de la lumière.

## 7.3 La structure des raies spectrales

L'expérience prouve que les raies du spectre de l'hydrogène ne sont pas simples ; chacune d'elles est en réalité constituée par une série de composantes extrêmement rapprochées, dont deux sont particulièrement intenses.

Un modèle d'atome, proposé par M. Bohr (un seul électron négatif tournant autour d'un électron positif dans le cas de l'hydrogène) rend compte du spectre de l'hydrogène, mais l'application de la dynamique classique conduit à prévoir seulement des raies simples.

M. Sommerfeld a établi que la dynamique de la relativité rend compte exactement, qualitativement et quantitativement, de la structure complexe des raies de l'hydrogène ainsi que de la structure des spectres de rayons X. On peut considérer comme établi que la mécanique nouvelle est seule applicable aux mouvements intra-atomiques. C'est là une des plus intéressantes vérifications du principe de relativité.

## 7.4 La signification de l'expérience de Michelson

On présente souvent l'expérience de Michelson comme la base du principe de relativité et beaucoup de personnes objectent qu'il est scabreux de bâtir une pareille théorie sur une expérience dont le résultat a été négatif.

Il est essentiel de faire remarquer que ce n'est pas sur l'expérience de Michelson qu'il faut fonder la théorie de la relativité. Cette théorie est basée sur les formules de Lorentz. c'est-à-dire sur les lois de l'électromagnétisme car les formules de Lorentz sont implicitement contenues dans les équations de Maxwell : c'est le fait que ces lois ont été vérifiées par des expériences d'une extraordinaire précision et doivent être conservées quand on change de système de référence qui est la base inébranlable de toute la théorie. L'expérience de Michelson a joué un rôle considérable, parce qu'elle a d'abord appelé l'attention sur la discordance entre l'expérience et les prévisions déduites des lois de la mécanique ; on a ensuite reconnu les causes profondes de ce désaccord. Si maintenant on donne à l'expérience de Michelson son véritable sens, on constate qu'elle vient simplement se joindre aux autres vérifications expérimentales.

La relativité généralisée et la loi de la gravitation d'Einstein nous apporteront des vérifications plus remarquables encore que celles qui viennent d'être indiquées.

# Deuxième partie

# LE PRINCIPE DE RELATIVITÉ GÉNÉRALISÉ ET LA GRAVITATION

# Chapitre 8

# Le champ de gravitation et l'univers réel

## 8.1 Les systèmes galiléens

Une conception fondamentale est à la base de la théorie de la relativité restreinte : celle du mouvement rectiligne et uniforme. Mais tout état de mouvement étant relatif, comment attribuer un sens absolu à l'état de mouvement rectiligne et uniforme ? On imagine bien un mobile en translation uniforme dans un système de référence considéré, par convention, comme immobile ; on conçoit que deux systèmes de référence soient en mouvement rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre. Existe-t-il un criterium qui permette de décider si un système envisagé isolément est ou non en translation uniforme ?

On voit qu'il est nécessaire de préciser les conditions de validité des principes et des lois précédemment exposés. Voici comment on doit resoudre la question. *Nous supposons qu'on puisse trouver un système dans lequel la loi d'inertie de Galilée (chap. 1) soit vérifiée* : dans ce système, défini par un corps de référence, une particule matérielle est au repos ou se déplace d'un mouvement de translation uniforme par rapport au corps de référence (ou par rapport à des axes liés à ce corps) si l'on ne fait agir aucune force sur elle. Dans un tel système, appelé *système galiléen*, on peut adopter les coordonnées habituelles d'espace et de temps (trois axes rectangulaires pour repérer les positions et un phénomène périodique servant d'horloge pour mesurer le temps) et ces coordonnées sont dites *coordonnées galiléennes*.

S'il existe un système galiléen, il en existe une infinité d'autres : ce sont tous ceux qui sont animés par rapport au premier Cet les uns par rapport aux autres) d'un mouvement de translation uniforme, sans rotation.

Ce que nous avons appelé système en translation uniforme, ou encore système non accéléré est ce que nous appelons maintenant système galiléen. La théorie de la relativité restreinte n'envisage que des systèmes galiléens : elle affirme que dans tout système galiléen la lumière se propagé avec la même vitesse dans toutes les directions (propagation isotrope), que cette vitesse est une constante universelle, que dans chaque système on peut faire une mesure optique du temps (chap. 3), que les lois de l'électromagnétisme (équations de Maxwell) sont rigoureuses, que les formules de transformation des coordonnées galiléennes sont celles de Lorentz, que les lois des phénomènes physiques restent les mêmes quand on change de système galiléen.

Un espace-temps qui jouit de la propriété de contenir dans toute son étendue une infinité de systèmes galiléens est un Univers de Minkowski (chap. 5). Nous dirons qu'il est "euclidien " à cause de l'analogie entre la ligne d'Univers qui correspond au mouvement rectiligne et uniforme et la ligne droite dans l'espace de la géométrie euclidienne (p. 53) et parce que, comme l'espace de la géométrie, il est *homogène*, c'est-à-dire jouit des mêmes propriétés dans toute son étendue. Comme l'espace de la géométrie, cet Univers est infini.

Une question capitale se pose maintenant : l'Univers réel est-il euclidien ? L'existence de la gravitation, que nous avons totalement négligée jusqu'a présent, ne vient-elle pas détruire l'homogénéité, qui est caractéristique de l'Univers de Minkowski ?

## 8.2 La pesanteur de l'énergie

Chacun sait qu'aux environs de toute matière règne un *champ de gravitation*, c'est-à-dire qu'en tout point de l'espace s'exerce une force, la pesanteur, qui agit sur toute portion de matière. On appelle "intensité du champ de gravitation" ou intensité de la pesanteur en un point la force qui s'exerce en ce point sur une masse matérielle égale à l'unité de masse ; cette intensité dépend des masses environnantes (les corps sont plus légers sur la lune que sur la terre). D'après la vieille loi de Newton, deux particules matérielles de masses $m$ et $m'$ s'attireraient proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance $r$, de sorte que la force $F$ aurait pour expression

$$F = G\frac{m\,m'}{r^2} \tag{8.1}$$

$G$ étant une constante, la constante de la gravitation (égale à $6,7\;10^{-8}$) dans le système centimètre-gramme-seconde (C.G.S.).

En un point situé à la distance $r$ d'une particule unique de masse $m$, l'intensité de la pesanteur due à cette particule (force agissant sur la masse $m = 1$) serait $\frac{G\,m}{r^2}$.

La gravitation, qui agit sur toute portion de matière, agit-elle aussi sur l'énergie ? la pesanteur est-elle, comme l'inertie, une propriété de l'énergie ? lorsque la masse inerte d'un corps change avec son énergie interne, en est-il de même de sa masse pesante ?

L'expérience répond par l'affirmative. Supposons qu'une perte d'énergie, et par suite de masse, par rayonnement, ne s'accompagne d'aucune variation de poids. Il en résulterait qu'une certaine quantité d'uranium et l'ensemble des produits de sa transformation, hélium et plomb, auraient des poids égaux mais des masses différentes. Or les expériences de M. Eotvös ont démontré (avec une précision qui atteint le vingt-millionième) qu'en tout lieu il y a proportionnalité entre la masse et le poids : la direction de la verticale, qui est celle de la résultante du poids et de la force centrifuge proportionnelle à la masse (force d'inertie due à la rotation de la terre), est en effet la même pour tous les corps.

Nous sommes amenés à conclure que l'énergie rayonnante, en particulier la lumière, doit être pesante puisqu'elle a une masse. Par suite *un rayon lumineux doit s'incurver dans un champ de gravitation.*

## 8.3 L'équivalence entre un champ de gravitation et un champ de force du à un état de mouvement accéléré

Les résultats qui précèdent entrainent de graves conséquences. Pour un observateur lié à la terre. un mobile lancé et abandonné à lui-même n'obéit pas à la loi galiléenne d'inertie, puisqu'il est dévié par la pesanteur nous voyons qu'il en est de même pour la lumière, ce qui implique que la vitesse de la lumière ne reste pas rigoureusement constante sur tout le parcours d'un rayon lumineux, contrairement au principe fondamental de la constance de cette vitesse.

La même conclusion s'applique partout où règne un champ de gravitation, c'est-à-dire dans l'Univers tout entier ; d'aucun système naturel on ne peut voir -du moins sur une grande étendue- un mobile abandonné à lui-même ou même un rayon lumineux se propager suivant un mouvement rectiligne et uniforme ; aucun mouvement n'est conforme à la loi d'inertie de Galilée.

Mais, pensera le lecteur, ce n'est pas étonnant : la loi de Galilée s'applique, *dans un système galiléen*, au mobile sur lequel n'est appliquée aucune force ; or dans un champ de gravitation une force attractive s'exerce sur le mobile.

Nous allons, avec Einstein, être conduits à une toute autre interprétation : si la loi d'inertie de Galilée n'est pas satisfaite, ce n'est pas parce qu'un mobile subit une force attractive s'il y a un champ de gravitation, c'est parce qu'on ne peut pas trouver un système galiléen. Nous allons montrer, en effet, que la force de gravitation ne doit pas être considérée comme une *force appliquée* à un corps : c'est une force d'inertie absolument de même nature que celle qui apparait dans un système accéléré, c'est-à-dire dans un système non galiléen (voir fin du chap. 1) ; il en résultera que dans une région où règne un champ de gravitation il n'existe pas de système de référence qui soit galiléen dans toute l' étendue du champ.

Nous allons analyser des notions qui nous paraissent évidentes parce que nous y sommes habitués, et c'est précisément parce que nous y sommes trop habitués que personne, avant M. Einstein, n'avait eu l'idée de les approfondir.

1. La gravitation est une action de proche en proche : à la question "pourquoi un objet soulevé puis abandonné à lui-même tombe-t-il ?", chacun est tenté de répondre : " parce qu'il est attiré par la terre". La physique moderne doit formuler autrement la réponse.

   Le développement, dans le domaine de l'électromagnétisme, de la théorie des actions de proche en proche non instantanées a conduit à la théorie de Maxwell, vérifiée par l'expérience, et au principe de relativité restreint (voir chap. 4). Une conception semblable doit être admise pour la gravitation : l'attraction de la terre sur l'objet qui tombe est un effet indirect ; la propriété d'agir sur une masse matérielle ou sur un rayon lumineux appartient, en réalité, au champ de gravitation, c'est-à-dire à l'Espace-Temps qui se trouve modifié au voisinage de la matière ; ce n'est pas une action à distance, directe et instantanée, produite par un corps attirant.
2. Égalité de la masse pesante et de la masse inerte : le champ de gravitation possède une propriété extrêmement remarquable qui n'appartient pas aux champs électrique et magnétique. Alors que dans un même champ électrique des charges différentes prennent des accélérations différentes, dans un champ de gravitation l'accélération acquise par un corps ne dépend ni de l'état physique, ni même de la nature du corps. *Tous les corps, qu'ils soient lourds ou légers, tombent avec la même vitesse si les conditions initiales sont les mêmes. L'accélération est indépendante de la force qui s'exerce sur le corps* (indépendante de son poids).

   Ce fait, si familier, est extraordinaire.

   Pour les faibles vitesses, on a la loi du mouvement de Newton

   $$\text{force} = \text{masse inerte} \times \text{accélération}$$

   c'est-à-dire que la masse inerte (masse au repos) est une constante propre au corps accéléré.

Si la force est le poids, on a

$$\text{force} = \text{masse pesante} \times \text{intensité du champ}$$

La masse pesante étant également une caractéristique du corps. On a donc :

$$\text{accélération} = \tfrac{\text{masse pesante}}{\text{masse inerte}} \times \text{intensité du champ.}$$

Puisque l'expérience prouve que, dans un même champ de gravitation, l'accélération est indépendante du corps,le rapport $\frac{\text{masse pesante}}{\text{masse inerte}}$ est une constante pour tous les corps et si l'on choisit les unités de façon que ce rapport soit égal à 1, la masse pesante est égale à la masse inerte.

Il y a longtemps que la mécanique a enregistré ce résultat, mais personne ne l'avait interprété. L'interprétation est celle-ci : la même qualité de la matière se manifeste, selon les circonstances, soit comme inertie, soit comme pesanteur : en termes plus précis : LA FORCE DE GRAVITATION EST UNE FORCE D'INERTIE.

Avec M. Einstein, imaginons une portion d'espace vide, si loin des étoiles et de toute matière qu'il n'y ait plus de champ de gravitation et que nous soyons dans le cas idéal où la loi galiléenne d'inertie est applicable. Il est alors possible, dans cette portion d'Univers, de choisir un système galiléen. Dans ce système supposons une chambre isolée à l'intérieur de laquelle se trouve un observateur : pour cet homme il n'y a pas de pesanteur, pas de direction privilégiée.

Supposons maintenant que, par un câble fixé à un crochet au milieu de la toiture de la chambre, un être extérieur se mette à tirer avec une force constante. Pour un observateur immobile dans le système galiléen, la chambre va prendre un mouvement uniformément accéléré et sa vitesse croîtra d'une façon fantastique. Mais toute autre sera l'opinion de l'homme enfermé dans la chambre ; l'accélération va projeter cet homme sur le plancher, pour lui il y aura un "haut" et un "bas" comme dans une chambre sur la terre ; il constatera que tous les objets tombent avec une même accélération ; sa première impression sera qu'il se trouve dans un champ de gravitation.

A la réflexion, il se demandera pourquoi il ne tombe pas en chute libre, ce qui ferait disparaître la pesanteur. Cherchant ce qui se passe, il découvrira le crochet et le câble tendu ; cette fois tout sera clair pour lui, il se dira : ma chambre est suspendue, *au repos*, dans un champ de gravitation.

Cet homme est-il dans l'erreur ? nullement : il a parfaitement le droit de considérer sa chambre comme immobile, bien qu'elle soit accélérée relativement à l'espace galiléen. On voit que la possibilité de cette interprétation repose sur la propriété fondamentale d'un champ de gravitation, de donner à tous les corps la même accélération, c'est-à-dire sur l'égalité de la masse pesante et de la masse inerte.

3. Le boulet de jules verne : Au lieu d'imaginer que la chambre de l'observateur est loin de toute matière, supposons-la, au contraire, en chute libre (sans rotation) dans le champ de gravitation d'un astre. La pesanteur y sera supprimée puisque tous les objets seront soumis à la même accélération que la chambre en tombant avec elle. Pour l'observateur de la chambre, il n y aura plus ni haut ni bas, et un mobile libre sera au repos ou animé d'un mouvement rectiligne et uniforme ; ce mobile se conformera à la loi de Galilée ; un système de référence lié à la chambre sera donc un système galiléen (bien que pour un observateur situé sur l'astre sur lequel tombe la chambre ce système soit accéléré) et l'homme de la chambre considérera l'Univers comme euclidien dans son voisinage.
4. Le principe d'équivalence : Ainsi, d'une part l'emploi d'un système de référence en mouvement accéléré dans un Univers euclidien équivaut à créer un certain champ de gravitation dans lequel ce système pourra être considéré comme immobile ; d'autre part, l'emploi d'un système de référence lié à un corps en chute libre dans un champ de gravitation revient à supprimer ce champ. En tout point d'espace il est donc impossible de se prononcer entre les deux hypothèses suivantes :
   (a) il existe un état de mouvement accéléré sans champ de gravitation ;
   (b) le système est au repos mais il y règne un champ de gravitation s'exerçant sur toute portion d'énergie.

   En un mot il est impossible de distinguer un champ de force d'inertie dû à un état de mouvement et un champ de gravitation. Il y a *équivalence*, selon l'expression d'Einstein, qui appelle champ de gravitation tout champ de force, que ce champ soit dû à un état de mouvement du système de référence ou au voisinage de masses matérielles.

## 8.4 L'univers réel n'est pas euclidien

Pour un observateur en chute libre, dans un boulet de Jules Verne, le champ de gravitation n'est supprimé que localement. C'est seulement dans une région peu étendue (théoriquement infiniment petite) que l'Univers est euclidien pour cet observateur. Le champ de gravitation subsiste à distance, parce que l'intensité de la pesanteur n'est constante ni en grandeur ni en direction ; en supprimant le champ en un point, on l'accentue ailleurs : par exemple, relativement à un observateur qui tomberait en chute libre sur la Terre, le champ de la pesanteur serait doublé dans la région symétrique par rapport au centre de la Terre.

Dans la nature, aucun champ de gravitation n'est uniforme ; *aucun système de référence ne peut annuler un champ de gravitation dans toute son étendue*. Il est impossible de trouver un système de référence dans lequel la lumière ait une propagation rigoureusement isotrope, dans lequel la loi d'inertie de Galilée puisse être rigoureusement appliquée. En un mot le système galiléen est théoriquement imaginable, et l'esprit le conçoit aisément parce que c'est le système le plus simple - de même que la géométrie euclidienne est la plus intuitive - mais ce n'est qu'une fiction et l'*Univers réel, envisagé dans son ensemble, n'est pas euclidien.*

## 8.5 La généralisation du principe de relativité

Puisque nos postulats fondamentaux ne sont pas rigoureusement vrais dans l'Univers réel, faut-il donc considérer le principe de relativité comme une abstraction en dehors des réalités ? Doit-on renoncer à cette admirable synthèse et considérer l'invariance des lois de la nature comme une simple approximation ? Faut-il penser que cette invariance ne serait exacte qu'a la limite, dans un Univers euclidien et en n'envisageant que des systèmes de référence galiléens ?

Doit-on, au contraire, étendre le principe de relativité au cas de l'Univers réel et de système de référence absolument arbitraires ?

M. Einstein n'a pas hésité. Il a érigé en principe l'affirmation suivante :

*Tous les systèmes de référence sont équivalents pour formuler les lois de la nature : ces lois sont "covariantes"*[1] *vis-à-vis de transformations de coordonnées arbitraires*

Cette généralisation s'impose. En effet toutes les lois de notre science sont basées sur la constatation de coïncidences absolues dans l'Univers. Dans le langage de la relativité, ces coïncidences sont des intersections de lignes d'Univers, absolues et par suite indépendantes de tout système de coordonnées. II est donc certain que les lois de la nature doivent pouvoir s'exprimer sous une forme intrinsèque, une forme qui reste la même quel que soit le système de référence, quelles que soient les coordonnées choisies pour repérer les événements.

1. Cela signifie que si ces lois sont données dans un système de référence. elles sont données en même temps dans tout autre système,quel qu'il soit.

Il fallait néanmoins une certaine audace pour généraliser ainsi le principe de relativité, car les observations les plus familières semblent contredire cette généralisation. Par exemple : dans un véhicule, un voyageur a été jeté à terre par suite d'un coup de frein trop brusque ; il parait difficile de persuader à ce voyageur que les lois des phénomènes sont les mêmes dans un système de translation uniforme et dans un système accéléré. Voici l'explication :dans tout système de référence règne un champ de force, un champ de gravitation (au sens généralisé d'Einstein) . les grandeurs caractéristiques de ce champ interviennent dans l'expression des lois ; c'est lui qui se manifeste par les effets mécaniques de l'accélération. Dans le cas idéal du système galiléen, ce champ est nul : *c'est précisément l'annulation du champ de force qui se traduit par la loi d'inertie de Galilée et qui caractérise le système galiléen* ; les lois générales doivent alors prendre, dans ce cas particulier, une forme simplifiée, disons plus exactement une forme *dégénérée*. Par exemple, les équations de Maxwell sont la forme dégénérée d'équations générales (auxquelles M. Einstein a pu remonter) où intervient le champ de gravitation : fait remarquable, les lois de l'électromagnétisme sous leur forme la plus générale sont d'une extrême simplicité ; elles apparaissent à l'esprit comme plus claires que les lois de Maxwell (appendice, note 14). C'est sous la forme dégénérée que ces lois ont été établies expérimentalement, parce que sur la terre le champ de gravitation (pesanteur et force centrifuge) est trop faible pour que son influence sur les phénomènes électromagnétiques ait pu être constatée. Les lois de Maxwell et les formules de Lorentz (qui sont la conséquence de ces lois) doivent être rigoureuses dans un Univers euclidien, et si l'on prend des coordonnées galiléennes : on voit par là que la théorie de la relativité restreinte reste intacte, mais elle correspond à un cas idéal : celui où le champ de gravitation serait nul.

En résumé, *les équations qui expriment les lois physiques doivent pouvoir être écrites de manière à conserver la même forme dans un champ de gravitation quelconque c'est-à-dire quand on change d'une manière arbitraire le système de référence.*

Cette condition de covariance limite considérablement les formes possibles pour les lois de la nature.

# Chapitre 9

# Les coordonnées de Gauss

## 9.1 Le temps et les longueurs dans un champ de gravitation

Dans un Univers de Minkowski, imaginons un système galiléen $S$, puis prenons un second système $S'$ formé par un disque plan dont le mouvement, par rapport à $S$, est une rotation autour d'un axe normal au plan du disque, passant par le centre de ce disque, et fixe dans le système $S$. Un observateur situé excentriquement sur le disque éprouve l'effet d'une force agissant radialement vers l'extérieur : cette force est interprétée par un observateur immobile par rapport au système $S$ comme un effet d'inertie (force centrifuge), mais l'observateur entraîné avec $S'$ peut considérer son disque comme immobile et attribuer la force à un certain champ de gravitation. Ce champ possède d'ailleurs une structure fort différente de celle du champ qui s'exerce au voisinage d'une masse attirante, mais en vertu du principe d' équivalence nous l'appelons quand même champ de gravitation ou, si l'on veut champ de gravitation géométrique.

Supposons que l'observateur de $S'$ prenne deux horloges identiques marquant toujours la même heure tant qu'on les laisse au meme point ; il place l'une au centre du disque et l'autre à une distance $r$ du centre ; ces horloges ne vont pas rester synchrones. Examinons-les, en effet, du système galiléen S, de façon à appliquer les résultats de la relativité restreinte. celle qui est au centre est immobile, l'autre est en mouvement : le temps propre de cette dernière est donc plus court que le temps du système galiléen, qui est le temps au centre. Si, au bout de quelque temps, on ramène au centre du disque l'horloge qui a séjourné à la distance $r$, on constate qu'elle retarde sur celle du centre. Comme à chaque distance au centre correspond un temps propre, il n'y a aucune synchronisation possible pour les horloges du système $S'$ ; *on* *ne peut pas définir un temps valable pour le disque tout entier*, c'est-à-dire mesurable par des horloges immobiles par rapport à ce disque.

La même difficulté se présente pour les coordonnées d'espace. Imaginons qu'en appliquant sur la périphérie du disque une règle très courte prise pour unité de longueur, on marque deux points $A$, $B$ et que le rayon soit mesuré avec la même règle unité. Pour un observateur placé au centre du disque (immobile et par conséquent appartenant au système galiléen) le rayon du disque n'est pas changé par la rotation, mais la longueur $AB$ qui est parallèle à la vitesse est plus courte que si le disque ne tournait pas (contraction des longueurs) ; l'observateur est donc conduit à considérer la circonférence, qui contient un nombre déterminé de fois la longueur AB, comme plus courte, et il trouve que le rapport de la circonférence au diamètre est inférieur au nombre $\pi$. *La géométrie de ce disque n'est plus euclidienne.*

Cet exemple fait comprendre que, d'une façon générale, dans un champ de gravitation géométrique (dû à un état de mouvement accéléré) on ne peut plus définir les coordonnées habituelles d'espace et de temps. En vertu du principe d'équivalence il en est de même dans un champ de gravitation permanent (dû au voisinage de matière) c'est-à-dire dans un univers non euclidien. Dans un univers non euclidien, il n'y a plus de coordonnées galiléennes, car la possibilité de choisir de telles coordonnées est caractéristique d'un univers euclidien.

En présence de cette difficulté, M. Einstein a résolu la question par une admirable extension de la théorie des surfaces de Gauss.

## 9.2 Les surfaces et les coordonnées de gauss

Tout au début du chapitre 1 nous avons, pour définir ce qu'on entend par système de coordonnées, envisagé une surface plane. Supposons maintenant une surface courbe qui ne soit pas développable sur un plan, par exemple la surface de la terre que pour simplifier nous supposerons rigoureusement sphérique ; si l'on s'interdit d'aller d'un point à l'autre de la surface en quittant celle-ci, c'est-à-dire si l'on ne considère que les points situés sur la surface même, celle-ci constitue, comme le plan, une multiplicité à deux dimensions - deux coordonnées, la longitude et la latitude définissent la position d'un lieu sur la terre - mais la géométrie de cette surface n'est plus la géométrie d'Euclide : il n y a plus de lignes droites sur la sphère, et la plus courte distance d'un point à un autre est un arc de grand cercle ; on ne peut plus se servir de coordonnées cartésiennes rectangulaires.

On voit que pour repérer les événements dans l'Univers réel, non euclidien, où il n'y a plus de coordonnées rigoureusement galiléennes, nous nous trouvons, avec quatre dimensions au lieu de deux, dans la même situation que le géomètre qui veut repérer les points sur une surface courbe sans sortir de cette surface.

Gauss a montré qu'il est possible d'énoncer les lois de la géométrie d'une surface courbe quelconque (sphère, ellipsoïde, etc.) sous une forme indépendante du système de coordonnées. On comprend qu'en ajoutant deux dimensions on pourra, par une généralisation de cette théorie, énoncer les lois de l'Univers non euclidien à quatre dimensions.

Gauss est parti de l' idée qu'il doit être possible, par des opérations de géodésie sur la surface, de mettre en évidence la *courbure* de celle-ci en faisant simplement des opérations *locales* d'arpentage, par les procédés habituels de la géométrie euclidienne du plan. En effet, en tout point d'une surface, il existe un *plan tangent* et dans une étendue limitée la surface peut être confondue avec son plan tangent : ceci est d'autant plus exact que l'étendue envisagée autour du point est plus petite, et devient rigoureux à la limite, pour une étendue infiniment petite.

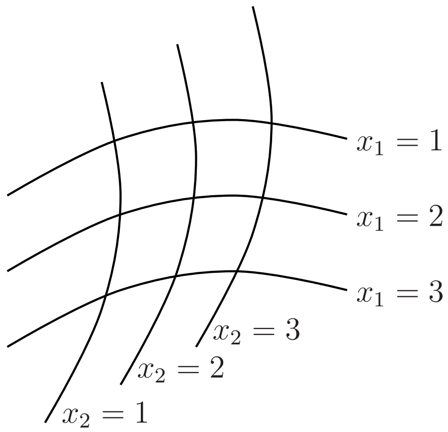


Figure 9.1 –

Traçons sur la surface une famille de courbes arbitraires $x_1$ (fig. 9.1) ; désignons chacune de ces courbes par un chiffre et figurons , les courbes $x_1 = 1$ $x_1 = 2$... entre deux de ces courbes, on peut imaginer une infinité de courbes représentant tous les nombres compris entre les deux nombres entiers qui désignent les deux courbes envisagées.

Ces courbes sont seulement assujetties à la condition de ne pas se couper, de façon qu'il ne passe qu'une des courbes $x_1$ par chaque point ; de la sorte, à chaque point de la surface correspond une coordonnée $x_1$ bien déterminée.

Traçons de même une seconde famille de courbes $x_2$, les courbes $x_2$ coupant les courbes $x1$. Chaque point de la surface est maintenant entièrement défini par les valeurs de ses deux coordonnées $x_1$ et $x_2$.

Deux points $P$ et $P'$ infiniment voisins ont pour coordonnées respectives $x_1$ et $x_2$, $x_1+dx_1$, $x_2+dx_2$. Les coordonnées de Gauss reviennent, en somme, à un numérotage, à la coordination de deux nombres, faite de manière que deux points infiniment voisins soient représentés par des nombres infiniment peu différents.

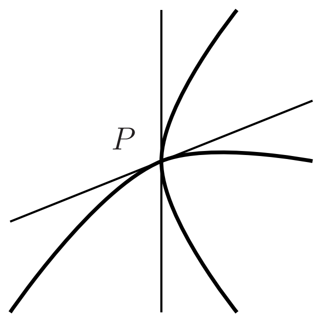


FIGURE 9.2 –

Dans une étendue infiniment petite autour d'un point $P$, nous confondons la surface avec son plan tangent et les courbes avec les lignes droites qui leur sont tangentes (fig. 13) ; nous sommes ainsi ramenés, en chaque point, à un système de coordonnées rectilignes mais obliques ; une formule bien connue de la géométrie euclidienne donne la distance $dl$ du point de coordonnées $x_1$, $x_2$ au point infiniment voisin de coordonnées $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$

$$dl^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1dx_2 + g_{21}dx_2dx_1 + g_{22}dx_2^2$$

$$\text{ou } dl^2 = g_{11}dx_1^2 + 2\ g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2 \text{ parce que} g_{21} = g_{12} \tag{9.1}$$

Si l'on s'est donné les courbes $x_1$ et les courbes $x_2$, on peut, en chaque point $P$, de coordonnées $x_1$ et $x_2$, mesurer avec une règle les distances $(\delta l)'$ $(\delta l)$" $(\delta l)$"$'$ qui séparent le point $P$ de trois points extrêmement voisins de lui $P'$, $P$", $P$"$'$ (fig. 9.3) et correspondant à des valeurs connues des différences de coordonnées $(\delta x_1)'$, $(\delta x_2)'$, etc... ; toutes ces grandeurs étant extrêmement petites nous pouvons pratiquement les considérer comme infiniment petites, c'est-à-dire écrire $(\delta l)' = (dl)'$, etc... et appliquer, pour les trois distances, la

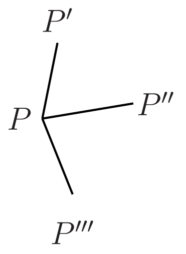


FIGURE 9.3 –

formule (9.1). Nous avons donc trois équations permettant de calculer $g_{11}$, $g_{12}$, $g_{22}$ qui sont ainsi obtenus par des mesures ordinaires d'arpentage.

Conformément à la géométrie euclidienne ordinaire, les $g$ sont bien déterminés en chaque point. ils sont indépendants des points $P'$, $P$", $P"'$ choisis pour les mesures d'arpentage. Mais, d'un point $P$ à un autre, les $g$ sont variables ; ce sont des fonctions des coordonnées $x_1$ et $x_2$ ( c'est-à-dire des grandeurs qui dépendent des valeurs de $x_1$ et $x_2$). C'est seulement dans le cas d'une surface euclidienne qu'on peut trouver des lignes $x_1$ et $x_2$ telles qu'on ait :

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 \tag{9.2}$$

c'est-à-dire $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$ en tout point. C'est ainsi que dans le plan, on peut prendre pour $x_1$ et $x_2$ des droites rectangulaires, c'est-à-dire employer des coordonnées cartésiennes rectangulaires [ chap. 1, équation (1.1)]. *L' equation (9.2) est caractéristique d'une surface euclidienne.*

Dans le cas général, les $g$ étant en chaque point des fonctions de $x_1$ et $x_2$, l'arpentage permet de calculer les $g$ et de déterminer comment ils varient en fonction des coordonnées. Gauss a montré que la géométrie d'une surface est entièrement déterminée quand on connaît ces fonctions et que les lois de cette géométrie s'expriment d'une façon indépendante des coordonnées.

Il est évident que la distance $dl$ de deux points déterminés, infiniment voisins l'un de l'autre, est un invariant, c'est-à-dire a une valeur indépendante du système de coordonnées, puisque cette distance peut être assimilée à un élément de ligne droite dans le plan tangent. Considérons maintenant deux points $P_1$ et $P_2$ et une ligne courbe quelconque tracée sur la surface entre ces points : la longueur de l'arc de courbe entre $P_1$ et $P_2$ est (comme nous l'avons dit p. 49) l'intégrale $\int_{P_1}^{P_2} dl$ ; l'arc de courbe élémentaire $dl$, assimilé en chaque $P_1$ point de la courbe à un élément de droite dans le plan tangent en ce point, est donné par la formule (9.1) ; il a une valeur indépendante des coordonnées choisies : l'intégrale, c'est-à-dire la longueur de l'arc de courbe est, par suite, un invariant pour toute transformation de coordonnées.

Sur toute surface, il existe des lignes de plus courte distance qu'on nomme les géodésiques (sur le plan ce sont les droites, sur la surface d'une sphère ce sont les grands cercles, etc...). Si l'on exprime mathématiquement qu'une ligne jouit de la propriété d'être la plus courte entre deux quelconques de ses points, c'est-à-dire que l'intégrale $\int dl$ (où maintenant l'on ne spécifie plus les deux points $P_1$ et $P_2$) est minimum, on obtient une équation qui est l'équation générale des géodésiques. Dans un changement du système de coordonnées, l'équation des géodésiques reste la même, à condition, bien entendu, que les $g$ aient les nouvelles valeurs $g'$ correspondant aux nouvelles coordonnées $x'_1$ et $x'_2$. Les propriétés des géodésiques sont exprimées sous une forme indépendante du système de coordonnées ; il devait bien en être ainsi car la propriété de longueur minimum qui les caractérise est absolue ; elle est évidemment indépendante du fait qu'il plait au géomètre d'adopter telle ou telle décomposition de la surface en mailles à deux dimensions.

On peut aller plus loin et caractériser l'individualité de la surface en chaque point ; il existe, en effet, un élément qui s'exprime au moyen des $g$ et de ce qu'on nomme en mathématiques leurs dérivés premières et secondes. Cet élément est invariant, c'est-à-dire a une valeur numérique , indépendante du système de référence employé ; c'est la courbure totale

$$R = \frac{1}{R_1 \, R_2} \tag{9.3}$$

$R_1$ et $R_2$ étant deux rayons de courbure qu'on appelle les rayons de courbure principaux.

Pour un plan, $R_1$ et $R_2$ sont infinis et la courbure totale est nulle en tout point. Pour un cylindre, l'un des deux rayons de courbure est infini ( à cause des génératrices rectilignes) et l'on a encore $R = 0$.

Si l'on suppose $R$ constant et négatif on a les lois de la géométrie de Lobatchefski.

Si $R$ est constant et positif, on a la géométrie de Riemann, applicable à la surface d'une sphère.

## 9.3 Extension de la théorie de Gauss

Dans l'Univers réel, nous ne pouvons plus employer des coordonnées galiléennes ; puisque nous ne pouvons plus définir les coordonnées habituelles d'espace et de temps, de même qu'en géométrie des surfaces courbes, il n y a plus de coordonnées cartésiennes rectangulaires.

En géométrie, on décompose une surface courbe en mailles bidimensionnelles, avec des coordonnées $x_1$, $x_2$ arbitraires. De même l'Univers peut être décomposé en cellules quadridimensionnelles, avec quatre coordonnées arbitraires $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$. Dans le cas général, il n'y a ni longueurs ni temps ; $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ sont quatre "coordonnées d'Univers". La méthode est calquée sur celle de Gauss, avec deux dimensions de plus. Au lieu de deux familles de courbes x1 et x2, on a quatre familles d' "espaces" (non euclidiens) tridimensionnels $x_1x_2x_3$ $x_1x_2x_4$, $x_1x_3x_4$, $x_2x_3x_4$ ; en chaque point d'Univers, ou événement, se coupent quatre espaces.

Il ne faudrait pas croire qu'une pareille coordination n'ait pas de sens, les coordonnées ne signifiant plus rien au point de vue des longueurs et du temps. Nous avons en effet insisté sur le fait, qui est la base même de la généralisation du principe de relativité, que les réalités physiques correspondent aux rencontres de lignes d'Univers de portions de matière ou d'énergie. Ces rencontres s'expriment par des valeurs communes des coordonnées, quel que soit le choix de ses coordonnées ; tous les systèmes sont donc également bons pour exprimer les lois de la nature, et la description de l'Univers peut se faire en coordonnées arbitraires, tout comme la géométrie des surfaces ; peu importe que ces coordonnées ne soient ni des longueurs ni des temps. Le principe de relativité généralisé peut maintenant s'énoncer : *Tous les systèmes de Gauss (généralisés) sont équivalents pour formuler les lois de la nature.*

Tient-on cependant à conserver les notions d'espace et de temps ? On peut le faire et l'on devra le faire dans toutes les applications physiques. Dans un systeme galiléen, on pourrait prendre un corps de référence invariable (invariable dans un même système) par rapport auquel on repérerait les longueurs, et des horloges synchrones pour mesurer le temps : dans un champ de gravitation, où il n y a plus de corps invariable ni d'horloges synchrones, on envisagera comme corps de référence des corps non rigides auxquels seront liées des horloges de marche arbitraire (assujetties seulement à la condition que les indications observables d'horloges infiniment voisines diffèrent infiniment peu), ou si l'on veut un système formé d'un réseau arbitraire à trois dimensions, avec des horloges aux noeuds du réseau pour donner l'heure dans chaque cellule : De pareils systèmes de référence, qui non seulement sont en mouvement arbitraire mais changent de forme arbitrairement dans le champ de gravitation sont les " mollusques " d'Einstein. Le mollusque est un système de Gauss généralisé, mais on conserve les notions d'espace et de temps, chaque point du mollusque étant considéré comme point d'espace, chaque point matériel par rapport à lui étant considéré comme au repos, tant que ce mollusque sert de système de référence :

La généralisation de la théorie de Gauss peut se résumer dans le tableau suivant :

| Surface courbe non Euclidienne | Univers non Euclidien |
|---|---|
| Deux dimensions. Décomposition en mailles bidimensionnelles arbitraires. | Quatre dimensions. Décomposition en cellules quadridimensionnelles arbitraires. |
| Dans une étendue infiniment petite autour de chaque point. la surface peut être remplacée par son plan tangent. | Dans un domaine quadridimensionnel infiniment petit autour de chaque point événement, l'Univers peut être remplacé par son Univers euclidien tangent qui est un Univers de Minkowski. Cet Univers tangent est (dans une étendue suffisamment petite) l'Univers de tout observateur en chute libre rapportant les événements à un système de référence qui lui est lié. |
| Dans le plan tangent, la géométrie euclidienne du plan est applicable, par suite : La distance élémentaire $dl$ de deux points infiniment voisins ne dépend pas du système de coordonnées (est un invariant). | Dans l'Univers euclidien tangent, la relativité restreinte est applicableé par suite : L'intervalle élémentaire $ds$ entre deux événements infiniment voisins ne dépend pas du système de coordonnées (est un invariant). |
| Cette distance s'exprime par la formule : $dl^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1dx_2 + g_{21}dx_2dx_1 + g_{22}dx_2^2$ avec $g_{21} = g_{12}$ de sorte que les quatre $g$ se réduisent à trois. | Cet intervalle s'exprime par la formule : $ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1dx_2 + g_{13}dx_1dx_3 + ... + g_{44}dx_4^2$ avec $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ de sorte que les seize $g$ se réduisent à dix. |
| La géométrie euclidienne est caractérisée par le fait qu'on peut trouver des systèmes de coordonnées dans lesquels les $g$ ont les valeurs constantes $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$ en tout point. (coordonnées cartésiennes rectangulaires). | La relativité restreinte (Univers euclidien) est caractérisée par le fait qu'on peut trouver des systèmes de coordonnées dans lesquels les $g$ ont les valeurs constantes $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{44} = 1$ $g_{\mu\nu} = 0$, si $\mu \neq \nu$ ($\mu$, $\nu = 1, 2, 3, 4$) en tout événement (coordonnées galiléennes). |
| Il existe des lignes de plus courte distance (telles que $\int dl$ soit minimum) appelées géodésiques. | Il existe des lignes d'Univers de plus grande longueur (telles que $\int ds$ soit maximum) appelées géodésiques. |
| La courbure totale s'exprime en fonction des $g$ et de leurs dérivées premières et secondes ; cette courbure est un invariant. | Il existe un invariant qui s'exprime en fonction des $g$ et de leurs dérivées premières et secondes. On l'appelle courbure totale d'Univers en chaque point-événement. |

Une différence se remarque entre les propriétés géométriques d'une surface et celles de l'Univers. Dans le cas d'une surface, $dl^2$, qui est le carré d'une longueur, est une quantité toujours positive ; dans le cas de l'Univers, $ds^2$ peut être positif ou négatif : si $ds^2$ est positif, l'intervalle ds représente un temps multiplié par c ; si $ds^2$ est négatif, l'intervalle représente une longueur dans l'espace. Sur une surface euclidienne $dl^2$ est la somme de deux carrés ($dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2$) ; dans l'Univers euclidien de Minkowski, $ds^2$ s'exprime au moyen de quatre carrés ($ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2$ avec $dx_4 = cdt$) mais les carrés des trois composantes d'espace sont précédés du signe -, alors que le carré de la composante de temps a le signe + : cette différence de signe est, suivant l'expression de M. Eddington, "le secret des différences que présentent les manifestations de l'espace et du temps dans la Nature".

Lorsque $ds$ représente l'arc de courbe élémentaire (c'est à-dire infiniment petit) d'une ligne d'Univers, $ds^2$ est toujours positif (deux événements infiniment voisins sur une ligne d'Univers forment un couple dans le temps : voir P. 47) et $ds$ est le temps propre élémentaire multiplié par c ; ce n'est pas une distance spatiale. La propriété de maximum des géodésiques d'Univers (au lieu de minimum comme en géométrie) est la conséquence de ce fait.

Malgré cette différence l'analogie de propriétés, d'une part entre le plan et l'Univers de Minkowski, d'autre part entre une surface courbe et l'Univers réel, est telle que nous avons le droit de dire que l'Univers de Minkowski est euclidien et que l'Univers réel est courbe.

# Chapitre 10

# La loi de la gravitation (Einstein)

## 10.1 Nature de la gravitation

Les grandeurs $g_{\mu\nu}$ ($\mu$, $\nu = 1, 2, 3, 4$) qui interviennent dans l'expression du carré de l'intervalle élémentaire et qui, dans le cas général, sont variables d'un point d'Univers à un autre, sont les grandeurs caractéristiques du champ de gravitation (au sens généralisé d'Einstein). Ce sont ces dix potentiels de gravitation qui doivent figurer dans l'expression des lois physiques pour conserver à celles-ci leur forme, quel que soit le système de référence.

Dans le cas particulier d'un Univers euclidien, et si de plus les coordonnées sont galiléennes. les $g_{\mu\nu}$ ont en tout point-événement les valeurs constantes :

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \ , \ g_{44} = 1$$

$$g_{\mu\nu} = 0 \text{ si } \mu \text{ est différent de } \nu.$$

et le champ de gravitation disparaît ; c'est le cas étudié en relativité restreinte. Les formules de transformation des coordonnées galiléennes - de celles-là seulement - sont les formules de Lorentz.

Un champ de gravitation, au sens généralisé, comporte un certain arbitraire puisqu'on peut le modifier à volonté par le choix des coordonnées, dont les $g_{\mu\nu}$ dépendent. Néanmoins il y a une chose indépendante de tout choix de coordonnées : c'est la *structure géométrique de l'Univers* ; à cette structure correspond un champ de gravitation permanent, connexe de la présence ou du voisinage de la matière, auquel se superpose un champ de gravitation géométrique introduit par le choix du système de référence.

Puisque, dans le voisinage de masses matérielles, tous les corps prennent la même accélération malgré leurs poids différents, il faut porter son attention, non pas sur la prétendue "force attractive" qui est variable avec le corps, mais sur l'état de mouvement, c'est-à-dire sur la ligne d'Univers qui, étant la même pour tous les corps placés dans les mêmes conditions initiales, doit être une caractéristique de l'Univers lui-même.

C'est bien une caractéristique de l'Univers car il est facile de démontrer que c'est une géodésique (voir tableau p. 84). Dans un Univers euclidien, et en coordonnées galiléennes, le mouvement d'un mobile abandonné à lui-même serait rectiligne et uniforme, la ligne d'Univers serait une droite d'Univers, ligne qui jouit de la propriété de longueur maximum (p. 51) ; toujours dans un Univers euclidien, remplaçons les coordonnées galiléennes par des coordonnées arbitraires, c'est-à-dire introduisons un champ de gravitation géométrique quelconque ; il est bien évident, puisque l'élément de ligne $ds$ a une longueur indépendante du système de coordonnées, que la propriété de longueur maximum est conservée. Alors, le principe d'équivalence (p. 74) nous permet d'affirmer qu'il en est de même dans un champ de gravitation permanent, c'est-à-dire que dans l'Univers réel, non euclidien, la ligne d'Univers d'un mobile abandonné à lui-même est encore la ligne de longueur maximum, c'est-à dire celle des géodésiques qui est déterminée par les conditions initiales du mouvement ; c'est là l'énoncé le plus général de la loi d'inertie.

On voit bien maintenant qu'il serait faux de dire : la force de gravitation est, une force attractive ; un corps abandonné à lui-même n'a pas un mouvement conforme à la loi d' inertie par ce qu'il subit une force appliquée. Cette ancienne conception est inexacte car un corps abandonné à lui-même est un mobile libre et se meut toujours suivant la loi d'inertie, mais cette loi n'est plus celle de Galilée puisque dans un champ de gravitation permanent, c'est-à-dire dans l'Univers non euclidien, il n y a plus de système galiléen, plus de droites d'Univers.

La structure géométrique de l'Univers est liée à la présence de la matière et plus généralement de l'énergie. La courbure imposée par cette structure aux géodésiques, lignes d'Univers des mobiles libres, se traduit dans nos observations par un état de mouvement accéléré ; le champ de gravitation est un champ de force d'inertie, mais cette force nous a donné l'illusion d'une force attractive appliquée, parce que, en fait, elle possède à nos yeux une telle apparence et que la loi de Newton, qui exprime cette prétendue force attractive, s'est trouvée être une excellente approximation dans la pratique.

## 10.2 Les Tenseurs

.

Dans la théorie de la gravitation, l'intervalle élémentaire dont le carré (voir tableau, p. 84), qui est une grandeur indépendante du système de coordonnées ($x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$), s'exprime par

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1dx_2 + ... + g_{44}dx_4^2$$

joue un rôle fondamental.

On est conduit, de plus, à envisager des êtres mathématiques appelés tenseurs (appendice, note 11). Un tenseur est un ensemble de grandeurs de même nature inséparables les unes des autres qui sont dites "composantes du tenseur" . Le "calcul différentiel absolu" créé par Riemann et Christoffel, développé par MM. Ricci et Levi-Civita (antérieurement à la théorie de la relativité) donne les règles (voir appendice) qui permettent de définir les tenseurs et de calculer les composantes d'un tenseur dans un nouveau système de coordonnées lorsqu'on connaît ces composantes pour un premier système et que, bien entendu, la transformation de coordonnées qui relie les deux systèmes est donnée.

La propriété fondamentale des tenseurs est la suivante : quand toutes les composantes d'un tenseur sont nulles (ou sont respectivement égales aux composantes d'un autre tenseur) dans un système de coordonnées, elles sont encore toutes nulles (ou égales aux composantes de l'autre tenseur) dans tout autre système de coordonnées, arbitrairement choisi. C'est là une propriété qui donne une individualité propre à un ensemble de grandeurs possédant le caractère tensoriel.

Par suite, une loi formulée par l'annulation d'un tenseur (annulation de toutes ses composantes) ou formulée par l'égalité de deux tenseurs est indépendante de tout système de coordonnées.

Le principe de relativité exige que toutes les lois puissent être mises sous la forme tensorielle. Il en résulte immédiatement que la vieille loi de la gravitation, la loi de Newton, ne peut pas être rigoureuse, car on ne peut pas la mettre sous la forme requise.

## 10.3 La loi de la gravitation

La structure d'Univers en présence d'une distribution donnée de matière, est absolue, car elle ne saurait être changée par le fait qu'il plait au mathématicien d'adopter tel ou tel système de coordonnées.

Par suite, lorsque les potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$ changent avec le choix (arbitraire) du système de coordonnées, les valeurs de ces potentiels doivent rester compatibles avec une même structure d'Univers. C'est dire que les $g_{\mu\nu}$ sont nécessairement assujettis à certaines liaisons.

Les équations les plus générales exprimant les liaisons qui doivent exister entre les dix potentiels de gravitation pour que ceux-ci, dans un changement arbitraire de coordonnées, se modifient en restant compatibles avec une même structure d'Univers (quelle que soit d'ailleurs celle-ci) doivent être, comme toutes les lois physiques, des relations tensorielles.

Ces relations constituent la loi de la gravitation.

Pour résoudre ce problème, M. Einstein n'a eu que les données suivantes :

1. A distance infinie de toute matière (ou de tout rayonnement) l'Espace-Temps doit être euclidien.
2. La loi de conservation de l'impulsion et de l'énergie sous sa forme (tensorielle) la plus générale doit être satisfaite.

Il est remarquable que ces conditions aient suffi pour déterminer la loi.

## 10.4 Loi de la gravitation dans le vide

Le tenseur fondamental de l'espace-temps est formé par les $g_{\mu\nu}$ ; il a pour composantes les seize $g_{\mu\nu}$

$$\text{tenseur } g_{\mu\nu} \left\{ \begin{array}{llll} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{array} \right.$$

mais ce tenseur est symétrique ($g_{21} = g_{12}$, $g_{31} = g_{13}$, etc...) de sorte qu'il n'y a que dix composantes pouvant prendre des valeurs différentes.

A partir de ce tenseur fondamental, on forme un autre tenseur, appelé tenseur de Riemann-Chrisioffel, dont les composantes ont une expression très compliquée ( voir note 11) , nous désignerons ce tenseur par la notation abrégée $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ ; les lettres $\mu$, $\nu$, $\sigma$, $\rho$ mises en indices désignent l'un quelconque des indices 1, 2, 3 4 ; ces mêmes indices $\mu$, $\nu$, $\sigma$, $\rho$ figurent aussi parmi les indices des $g$ et parmi ceux des coordonnées qui interviennent dans l'expression développée de $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$. Nous ne pouvons guère expliquer en langage ordinaire pourquoi $\rho$ est écrit en haut alors que les trois autres indices sont écrits en bas ; disons seulement qu'il existe deux lois de transformation des composantes tensorielles lorsqu'on change de coordonnées : la loi de contrevariance et la loi de covariance ; quand un indice est de caractère contrevariant, on l'écrit en haut, quand il est de caractère covariant on l'écrit en bas.

Comme dans le cas du tenseur $g_{\mu\nu}$, mais avec deux indices de plus, pour chaque valeur 1, 2, 3, 4 des indices , on a une composante du tenseur, de sorte qu'en donnant successivement à toutes les lettres $\mu$, $\nu$, $\sigma$, $\rho$ chacune des valeurs 1, 2, 3, 4 et faisant toutes les combinaisons possibles, on obtient 256 composantes.

On démontre que l'annulalion de ce tenseur, c'est-à-dire l'annulation de toutes ses composantes est la condition nécessaire et suffisante pour que l'espace-temps soit euclidien.

$$R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0 \tag{10.1}$$

Les 256 équations représentées symboliquement par cette formule se réduisent d'ailleurs à 20 équations distinctes.

Ce n'est pas la loi cherchée puisque l'Espace- Temps n'est pas euclidien dans son ensemble, mais la loi $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0$ convient dans une région de l'espace située à l'infini de toute masse ; il faut donc chercher une relation tensorielle plus générale, comportant la précédente comme cas particulier, c'est-à-dire qui se trouve satisfaite lorsque $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0$.

Partant du tenseur $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$, à quatre indices (du quatrième ordre), on peut construire un tenseur du second ordre, c'est à-dire à deux indices (seize composantes) en imposant la condition que, les indices $\sigma$ et $\rho$ soient toujours les mêmes (opération qu'on nomme contraction) ; ce nouveau tenseur, que nous désignerons par $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Riemann-Christoffel contracté ; à l'aide de ce tenseur contracté, on peut enfin former un tenseur d'ordre nul (une seule composante) : or tout tenseur d'ordre nul est un invariant. L'invariant en question, $R$, se trouve être une généralisation de la courbure de Gauss (p. 82), on peut donc l'appeler courbure totale d'Univers.

La loi $R = 0$, c'est-à-dire l'annulation de la courbure tolale en tout point-événement ne saurait convenir non plus, car c'est une loi trop générale, insuffisante pour déterminer un champ de gravitation.

On n'a donc pas le choix, car pour que $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0$ soit une solution particulière, il n y a qu'une loi générale possible, l'annulation du tenseur contracté

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{10.2}$$

C'est la loi générale de la gravitation dans le vide (appendice, note 12).

Le tenseur $R_{\mu\nu}$ étant symétrique ($R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$) n'a que dix composantes distinctes ; l'annulation des composantes donne donc dix équations. Mais on constate que six seulement de ces équations sont indépendantes ; c'était à prévoir parce que dix équations indépendantes détermineraient les dix $g_{\mu\nu}$ dans l'expression du carré de l'intervalle $ds^2$, et par conséquent spécifieraient non seulement la structure de l'Espace- Temps mais encore le système de coordonnées. Or ce système doit rester arbitraire ; il est quatre fois indéterminé puisqu'il y a quatre coordonnées ; il faut donc qu'il y ait entre les $g_{\mu\nu}$ quatre relations qui soient des identités (appendice, note 12).

En définitive la loi de la gravitation dans le vide comporte six conditions. C'est une restriction considérable imposée aux géométries de l'Univers.

## 10.5 Loi de la gravitation dans la matière

Les équations résumées par $R_{\mu\nu} = 0$ décrivent les propriétés les plus générales de la structure géométrique de l'Univers aux points où il n 'y a ni matière ni énergie électromagnétique, c'est-à-dire dans ce que nous appelons le vide. Il reste à résoudre un problème fondamental : la matière subit l'action d'un champ de gravitation mais nous savons qu'elle est aussi la source d'un champ de gravitation ; c'est ce qu'il s'agit d'exprimer. En d'autres termes, il s agit de déterminer la loi qui doit remplacer la loi d'attraction proportionnelle à la masse et inversement proportionnelle au carré de la distance, la vieille loi de Newton que Poisson a traduite analytiquement par une équation locale, c'est-à-dire par une équation valable en chaque point d'espace : dans cette équation intervient la densité de la matière au point considéré.

La densité en un point est le rapport de la masse contenue dans un volume d'espace infiniment petit, à ce volume lui-même : c'est la masse par unité de volume. Or la masse, c'est l'énergie divisée par la constante $c^2$, et nous avons vu (p. 64) que l'énergie est inséparable de la quantité de mouvement. Mais l'énergie et la quantité de mouvement ne suffisent pas, dans le cas général, pour constituer un tenseur : il faut y joindre des grandeurs qui expriment les courants de matière, en d'autres termes, les courants de quantité de de mouvement. On forme ainsi un tenseur, le tenseur matériel ou tenseur impulsion-énergie que nous désignerons par $T_{\mu\nu}$ (seize composantes) dont dix seulement sont distinctes car il est symétrique. C'est ce tenseur qui doit remplacer la densité qui figurait seule dans l'ancienne théorie : signalons d'ailleurs que la composante $T_{44}$ de ce tenseur est, dans tous les cas où la matière est animée de vitesses faibles par rapport à la vitesse de la lumière, considérablement plus grande que les autres composantes, et serait précisément égale à la densité de la matière, si l'on pouvait employer des coordonnées rigoureusement galiléennes.

On démontre (voir une démonstration intuitive dans l'appendice, note 12) que, pour que la loi générale de conservation de l'impulsion-énergie et que la loi de la gravitation dans le vide $R_{\mu\nu} = 0$ soient satisfaites, il doit y avoir, à un facteur constant près, égalité entre le tenseur $T_{\mu\nu}$ et le tenseur $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ ($R$ est l'invariant dont il a été question plus haut, la courbure totale de I'espace-temps). On doit donc avoir en tout point

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \chi T_{\mu\nu} \tag{10.3}$$

$\chi$ étant une constante universelle.

Cette loi peut encore se mettre sous la forme suivante

$$R_{\mu\nu} = -\chi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \tag{10.4}$$

$T$ étant un invariant qu'on construit à partir de $TI$), et qu'on trouve égal à $xpo$, $po$ étant la densité au repos de la matière au point considéré. c'est-à-dire la densité qui serait mesurée par un observateur immobile par rapport à la matière [1].

Dans le vide $T$ et $T$ sont nuls, puisqu'il n y a pas de matière et l'on retrouve bien la loi dans le vide $R = 0$.

## 10.6 Loi de Newton

Si, dans les dix équations représentées par (10.3) ou (10.4), obtenues en donnant aux indices $\mu$ et $\nu$ les valeurs 1, 2, 3, 4 (les seize équations se réduisent à dix parce que les tenseurs sont symétriques : $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ et $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$) on néglige les quantités qui pratiquement sont très petites, on trouve, en première approximation mais non comme loi exacte, la loi de Newton, et la constante se trouve déterminée en fonction dela constante connue $G$ qui intervient dans l'expression de l'ancienne loi.

## 10.7 La dynamique

Nous avons dit que, dans le vide, les dix équations $R_{\mu\nu} = 0$ se réduisent à six conditions, à cause de quatre identités qui correspondent à la quadruple indétermination des coordonnées.

En tout point où il y a de la matière présente, les quatre mêmes identités sont encore vérifiées, car elles résultent de la définition mathématique du tenseur $R_{\mu\nu}$. Comme, d'autre part, la loi de la gravitation exprimée par (10.3) ou (10.4) traduit une relation entre $R_{\mu\nu}$ et $T_{\mu\nu}$ les quatre identités se transforment en quatre équations [2] entre les grandeurs qui forment le tenseur impulsion-énergie. Le degré d'indétermination des coordonnées, c'est-à-dire le nombre de dimensions de l'Univers impose donc à la matière un nombre

1. La densité varie avec la vitesse puisque la masse et le volume dépendent de la vitesse.

2. Les équations sont des relations entre des grandeurs inconnues et des grandeurs connues ; ce sont des conditions imposées aux grandeurs inconnues, ces conditions, si elles sont suffisantes, déterminent les inconnues. Dans une identité, les deux membres expriment une seule et même chose et peuvent se ramener à une même expression ; autrement dit les termes d'une identité se détruisent deux à deux.

égal de conditions qui doivent être nécessairement remplies. Il se trouve que ces quatre conditions constituent la loi fondamentale de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie (voir appendice, note 12).

Si l'on demandait "la loi d'Einstein est-elle bien d'accord avec les lois de la mécanique" il faudrait répondre : *c'est elle qui résume la dynamique tout entière*. Cette loi contient. sous sa forme la plus générale, la loi de conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la masse ; on démontre (voir note 12) qu'elle contient la loi du mouvement du mobile libre (la ligne d'Univers du mobile libre est une géodésique) . c est la loi de l'inertie car gravitation et inertie sont une seule et même chose. Elle contient toute la dynamique du point matériel.

# Chapitre 11

# Applications et vérification de la loi d'Einstein

## 11.1 Le champ de gravitation d'un centre matériel

La loi d'Einstein a permis de déterminer l'expression de l' Intervalle élémentaire ds qui sépare deux événements infiniment voisins dans le champ de gravitation produit par un centre matériel, c'est-à-dire l'expression de l'élément de temps propre ($d\tau = \frac{ds}{c}$). Cette expression ( note 13) a été donnée en fonction de coordonnées aussi voisines que possible de coordonnées polaires euclidiennes (voir p. 12), et qu'on peut assimiler pratiquement à des coordonnées euclidiennes, tant que la déformation (par rapport à un espace-temps euclidien) de l'Univers est faible ; elle s applique dans un système de référence lié au centre source du champ de gravitation [1].

Dans un champ non statique, c'est-à-dire si l'on suppose que le centre matériel est en mouvement dans le système de référence employé, on trouve que les petites déformations de l'Espace-Temps, c'est-à-dire *les effets de gravitation, se propagent avec la vitesse de la lumière*. Voilà résolu un problème qui avait pendant bien longtemps préoccupé les physiciens et les astronomes.

1. Voir dans l'appendice (note 13) une remarque sur une objection récemment faite par M. Painlevé.

## 11.2 Le mouvement des planètes. - Première vérification : le mouvement de mercure

Si l'on détermine les géodésiques de l'Espace-Temps ayant l' élément d'arc calculé ainsi qu'il a été dit plus haut, on obtient le mouvement des mobiles libres dans le champ de gravitation d'un centre, Au lieu d'une ellipse fixe pour la trajectoire des planètes (mouvement conforme à la loi de Newton) on trouve une ellipse qui tourne lentement dans son plan (appendice, note 13), Le calcul numérique montre que pour les planètes autres que Mercure, l'ecart entre les prévisions conformes à la loi de Newton et celles qui résultent de la loi d'Einstein est très faible, de l'ordre de grandeur des erreurs d'observation, Mais pour Mercure, dont l'orbite a une forte excentricité et qui est près du Soleil, si l'on introduit dans la formule les valeurs connues de la masse du Soleil, du grand axe et de l'excentricité de l'orbite, et de la durée de révolution de Mercure on trouve une rotation de périhélie (point le l'orbite le plus rapproché du soleil) de 42,9 secondes d'arc par siècle, Depuis que Leverrier a établi la théorie de Mercure, en tenant compte des perturbations dues aux autres planètes, de Vénus en particulier, le désaccord entre les prévisions de la mécanique newtonienne et les observations est précisément 43" par siècle, écart qu'on n'avait pas réussi à expliquer.

La nouvelle mécanique céleste basée sur la loi d'Einstein se développe actuellement, en particulier en ce qui concerne la théorie de la Lune.

## 11.3 Seconde vérification - déviation de la lumière

La ligne d'Univers d'un rayon lumineux est une géodésique de longueur nulle, puisque ds est constamment nul pour la lumière (p. 57). La trajectoire d'un rayon lumineux s'obtient en écrivant cette condition.

On trouve (note 13) que si un rayon lumineux se dirige sur le centre matériel (propagation radiale) la vitesse de la lumière diminue à mesure que la lumière se rapproche de ce centre, et le même résultat serait exact pour un mobile animé d'une vitesse très voisine de la vitesse de la lumière : c'est une véritable répulsion. Pour un rayon passant transversalement, la vitesse en un point de ce rayon est d'autant plus faible que la distance de ce point au centre matériel est moindre ; il en résulte que tout se passe comme si le rayon lumineux traversait, dans un espace euclidien, un milieu réfringent réparti en couches Indice de concentriques dont l' indice de réfraction augmenterait à mesure que la distance au centre serait plus petite ; il est facile de voir que

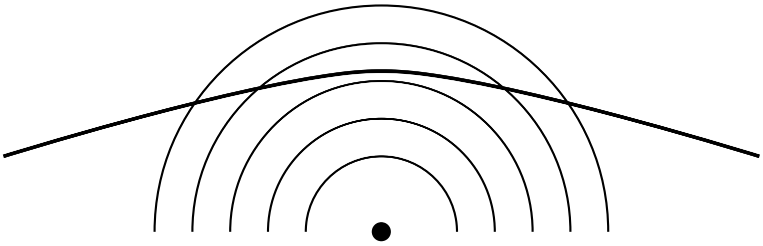


FIGURE 11.1 –

la trajectoire s'incurve en donnant toutes les apparences d'une attraction de la lumière par le centre (fig. 11.1).

Ces résultats montrent qu'il est, au fond, inexact de qualifier le centre matériel de "masse attirante". La matière est un centre de déformation de l'Espace- Temps et l'effet produit sur un mobile nous apparaît, selon la grandeur et l'orientation de la vitesse, soit sous l'aspect d'une attraction, soit sous l'aspect d'une répulsion. Nous sommes loin des idées newtoniennes.

II est essentiel de remarquer que les résultats qui précèdent sont établis dans un système de référence lié au centre matériel et en prenant comme coordonnées des coordonnées aussi voisines que possible des coordonnées euclidiennes (coordonnées devenant d'ailleurs euclidiennes à distance infinie du centre ). II n'en reste pas moins vrai que l'observateur en chute libre ( c'est le cas de l'observateur terrestre dans le champ de gravitation du Soleil, car la Terre est en chute libre), faisant avec des règles et des horloges, dans son voisinage immédiat, la mesure de la vitesse de la lumière, confondrait l'Univers réel avec l'Univers euclidien tangent et trouverait toujours dans toutes les directions une vitesse égale à la constante c ; la variation de vitesse ne peut apparaître que si l'on envisage une très grande étendue du champ de gravitation.

Le calcul montre que pour un rayon venant de très loin, et parvenu très loin du centre après être passé à la distance minimum R de ce centre, la déviation totale de ce rayon est $\frac{4GM}{c^2 R}$, $M$ étant la masse du centre, et $G$ la constante de la gravitation. *Celle déviation est exactemenl double de celle qui résulterait de la loi de Newlon, appliquée à un mobile de vitesse initiale c.* Pour un rayon passant tangentiellement au bord du soleil, on trouve 1",74. ainsi une étoile, vue près du bord du Soleil, doit être déviée vers l'extérieur du Soleil, de 1",74 à partir de sa position normale sur la sphère céleste.

Malgré la petitesse de l'effet, l'exactitude de ce résultat a été vérifiée par les astronomes de Greenwich et d'Oxford au cours de l'eclipse totale de Soleil du 29 mai 1919.

La zone de totalité traversait l'Atlantique, commençant au Brésil et finissant en Afrique. Une première expédition (MM. Crommelin et Davidson) se rendit à Sobral au Brésil, et prit une dizaine de photographies pendant les cinq minutes que dura la totalité de l' eclipse. Deux mois après, la même région du ciel fut visible de nuit et fut photographiée avec les mêmes appareils pour permettre la comparaison ; on trouva que les déplacements des étoiles sont bien. comme le prévoit la théorie, en raison inverse de la distance au centre du Soleil. et les déplacements ramenés à ce qu'ils seraient au bord même du Soleil, ont donné une moyenne de 1"98. L'autre expédition (MM. Eddington et Cottingham). installée dans l'île du Prince (golfe de Guinée), a trouvé une moyenne de 1",60. La moyenne des deux résultats. 1",79, concorde remarquablement avec la valeur prévue par Einstein.

La déviation observée ne peut d'ailleurs pas être attribuée à une atmosphère ou à de la matière cosmique entourant le Soleil jusqu'aux distances pour lesquelles les mesures ont été faites. car le pouvoir absorbant et la densité d'une eclat des telle atmosphère auraient affaibli notablement l' étoiles ; d'autre part, des comètes suivies dans la même région n'ont manifesté aucun ralentissement.

## 11.4 Troisième vérification - Le déplacement des raies spectrales

La formule qui donne l'expression de $ds^2$ dans un champ de gravitation permet d'établir que, si deux horloges identiques sont placées. l'une sur la Terre où le champ de gravitation est faible, l'autre sur le Soleil où le champ est intense, pour l'observateur situé sur la Terre l'horloge solaire a une marche plus lente que l'horloge terrestre (note 13).

On démontre que ce résultat entraîne la conséquence suivante. Considérons une des vapeurs lumineuses présentes sur le Soleil ; les raies spectrales de cette vapeur doivent, dans le spectre solaire, nous paraître déplacées vers le rouge, par rapport à la position des raies de la même vapeur dans le spectre obtenu au laboratoire. Ce déplacement est très faible (0,011 unité d'Angström pour le milieu du spectre).

M. A. Pérot, ayant comparé dans le spectre solaire et dans le spectre obtenu au laboratoire les positions de raies du cyanogène et du magnésium, a établi qu'après corrections de déplacements dus à des causes connues, il subsiste un écart égal. dans les limites d'approximation des mesures, à celui prévu par Einstein. Le même résultat a été obtenu par MM. Buisson et Ch. Fabry pour de nombreuses raies du fer.

# Chapitre 12

# La courbure de l'espace et du temps. Hypothèses cosmologiques

## 12.1 L'espace fini bien qu'illimité

L'ancienne conception de l'espace infini comporte des contradictions connues depuis longtemps. Doit-on admettre que dans cet espace infini la matière est répandue partout avec une densité moyenne constante (l'unité de volume étant prise suffisamment grande) . Ce serait admettre une quantité infinie de matière ; on peut démontrer que dans cette hypothèse la loi d'Einstein, comme celle de Newton, conduirait à des résultats contradictoires.

Doit-on admettre que l'Univers a une sorte de centre près duquel la densité de la matière est maximum et autour duquel la matière se raréfie jusqu'au vide complet ? La matière formerait une île dans l'espace infini. Mais alors toute énergie rayonnante sortie de cette île se propagerait à l'infini, sans retour, et se dissiperait ; la matière elle-même se disperserait, comme l'atmosphère d'un astre qui s'évapore peu à peu dans l'espace. Il faudrait admettre que, puisque l'Univers n'est pas mort, la matière n'existe que depuis un temps limité, ce qui recule toutes les difficultés et n'en résout aucune.

Pour un homme intelligent qu'on aurait laissé dans l'ignorance de la forme de la Terre, la disparition progressive d'un navire sous l'horizon serait une révélation : ayant compris que la surface est courbe, cet homme envisagerait la possibilité d'une surface finie, d'un monde fermé. Pareille révélation est donnée par la théorie d'Einstein, par le simple fait qu'un rayon lumineux ne se propage pas nécessairement en ligne droite dans le vide, par la notion de courbure de l'Univers. On supprimerait les difficultés de l'ancienne conception en admettant que l'espace est *fini bien qu'illimité*, comme la surface d'une sphère qui ne comporte pas de bornes puisqu'on peut en faire le tour indéfiniment. Le temps seul resterait infini.

Ce n'est pas là une hypothèse arbitraire. M. Einstein a établi, par des considérations basées sur la théorie de l'électromagnétisme (voir cette théorie dans l'appendice, note 14), sur les propriétés du tenseur d'énergie électromagnétique (qu'on doit ajouter au tenseur d'impulsion-énergie matérielle quand il y a un champ électromagnétique) sur la théorie électronique de la matière, que la loi de gravitation qu'il avait primitivement donnée- celle que nous avons admise jusqu'a présent - doit être corrigée (note 15).

$R_{\mu\nu}$ étant, comme précédemment, le tenseur de Riemann-Christoffel contracté (p. 107), posons $R'_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \lambda\, g_{\mu\nu}$ , $\lambda$ étant une constante universelle, d'ailleurs extrêmement petite. La loi dans le vide doit être

$$R'_{\mu\nu} = 0 \tag{12.1}$$

au lieu de $R_{\mu\nu} = 0$ et la loi, en tout point où se trouve de la matière ou de l'énergie électromagnétique s'exprime par

$$R'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R' = \chi T_{\mu\nu} \tag{12.2}$$

au lieu de $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \chi T_{\mu\nu}$, $R'$ étant l'invariant $R - 4\lambda$, et $T_{\mu\nu}$ le tenseur total d' énergie (tenseur matériel + tenseur d' energie électromagnétique ).

Une modification radicale est la conséquence de la nouvelle loi. Alors que dans la loi primitive la courbure totale $R$ était nulle dans le vide[1], et égale à $\chi\rho_0$ ( $\rho_0$ densité propre) dans la matière, maintenant la courbure dans le vide est la constante $R_0 = 4\lambda$ et la courbure dans. la matière est $R = R_0 + \chi\rho_0$.

Mais, à part ce qui vient d'être dit, rien n'est changé à la théorie, où il suffit de remplacer $R_{\mu\nu}$ par $R'_{\mu\nu}$ et $R$ par $R' = R - 4\lambda$ . La nouvelle loi entraîne, comme la précédente, la conservation de l'impulsion et de l'énergie. D'ailleurs le terme correctif $\lambda\, g_{\mu\nu}$ étant très petit, on peut le supposer nul dans toutes les applications astronomiques.

Les vitesses relatives des astres sont toujours extrêmement petites par rapport à la vitesse de la lumière. Cette remarque nous permet d'envisager un système de référence relativement auquel la matière est *en moyenne* au repos et dans lequel les vitesses individuelles sont faibles. Dans ce système la matière est quasi-stationnaire. Adoptant ce système, si l'on cherche l'aspect d'ensemble de l'Univers, en négligeant les perturbations locales dues à la distribution irrégulière de la matière (comparables au relief du sol par rapport

1. Une courbure totale nulle ne signifie pas que l'Univers n'est pas courbe car la courbure totale peut être nulle sans que les rayons de courbure principaux soient tous infinis.

à la forme d'ensemble de la terre), la nouvelle loi comporte deux solutions données, l'une par M. Einstein, l'autre par M. de Sitter (note 15). Dans l'une comme dans l'autre la "coupe à temps constant" est un *espace à courbure constante positive. L'espace est fermé.*

## 12.2 L'univers d'Einstein

Pour mieux comprendre, considérons d'abord une surface courbe au lieu d'un espace courbe. Imaginons des êtres infiniment plats, entourés d'objets tout en surface, assujettis à vivre sur la surface d'une sphère (12.1) sans avoir la perception d'une troisième dimension d'espace. Confondant en chaque

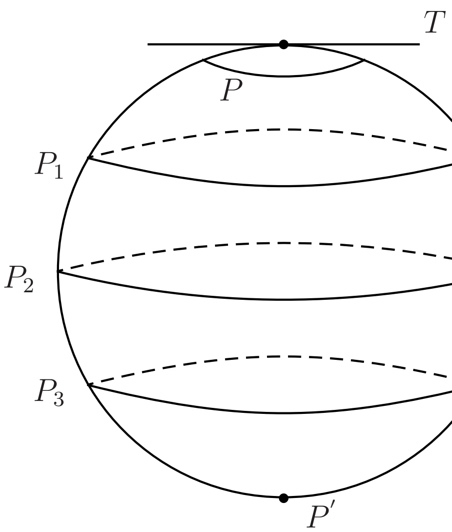


FIGURE 12.1 –

point $P$ la surface de leur monde sphérique avec le plan tangent $PT$, ils imagineront la géométrie plane (celle d'Euclide) et penseront d'abord que leur univers s' étend à l'infini. Ils appelleront "ligne droite le plus court chemin d'un point à un autre. S'ils portent autour d'un même point $P$, dans toutes les directions, des longueurs égales, ils construiront un cercle, et tant que le rayon sera petit, ils trouveront que le rapport de la circonférence au diamètre est un nombre indépendant du rayon $\pi = 3,1415$..... Cependant, s'ils tracent des cercles de "rayons" de plus en plus grands $PP_1$, $PP_2$ etc. - ce qu'ils appellent rayon étant un arc de grand cercle puisqu'ils restent sur la surface - ils constateront que le rapport de la circonférence au diamètre devient inférieur à $\pi$ et diminue à mesure que le rayon augmente, enfin que la circonférence elle-même décroît et finit par se réduire à un point $P'$ - le point antipode. Les mathématiciens de ce monde comprendront que leur univers est courbe ; ils déduiront de leurs mesures darpentage que c'est une surface a courbure constante positive *finie bien qu'illimitée* limitant un "hypercercle" à *trois* dimensions dont ils pourront calculer le rayon.

Ajoutons une dimension, nous pouvons concevoir l'espace sphérique. Cet espace est difficile à se représenter ; il n a absolument rien de commun avec l'intérieur d'une boule limitée par une surface sphérique dans l'espace à trois dimensions ; *il limite une hypersphère dans un espace à quatre dimensions comme une surface sphérique limite une sphère ordinaire.* Dans l'espace courbe qui limite une hypersphère, portons à partir d'un point, dans toutes les directions, des longueurs égales mesurées sur des fils tendus, nous obtenons une sphère. A partir du même point portons des longueurs de plus en plus grandes, nous obtenons d'abord des sphères de surfaces croissantes. puis une sphère maximum (pour la longueur $\frac{1}{2}\pi r$, $r$ étant le rayon de l'hypersphère) ensuite les sphères décroissent - comme les cercles de l'exemple précédent - pour se réduire au point antipode à la distance $\pi r$.

Dans l'Univers d'Einstein, l'espace est sphérique [2] mais le temps n'a pas de courbure, il est rectiligne : l'*Espace-Temps est cylindrique.* Cette hypothèse constitue un retour à l'espace absolu et au temps absolu ; la séparation entre l'espace et le temps est rétablie, parce que la direction des génératrices du cylindre donne *un temps d'Univers absolu.* Mais c'est un absolu dont nous n'avons pas connaissance en toute rigueur, car, pour tout observateur en mouvement par rapport à l'ensemble de la matière mondiale, l'espace et le temps restent unis suivant la conception de Minkowski ; le temps que nous mesurons, variable d'un système à l'autre, variable d'un point à un autre dans un champ de gravitation, n'est pas ce temps absolu ; toutefois l'écart est bien faible, il ne serait notable que si l'on parvenait à réaliser des vitesses considérables relativement à l'ensemble de la matière mondiale.

Une conséquence curieuse est que les rayons lumineux émanés d'un point, après s'être concentrés au point antipode, pourraient se concentrer de nouveau au point de départ, qui ne serait plus d'ailleurs le point occupé par la source de lumière car celle-ci se serait déplacée pendant le temps - des billions ou des trillions d'années peut-être - que demanderait la lumière à faire le tour de l'Univers. Beaucoup d'étoiles ne seraient que des fantômes d'un passé très reculé. Mais cette conception est peu vraisemblable ; il est bien probable que la lumière serait absorbée dans un pareil voyage, car il y a toujours des traces de matière répandues dans l'espace.

2. Ou elliptique, mais nous ne parlerons que de l'espace sphérique

## 12.3 L'univers de de Sitter

Dans la solution de M. de Sitter la coupe à temps constant est encore un espace sphérique, mais il y a aussi une courbure du temps. L'Univers est hyperbolique. Il n'y a plus de temps d'Univers absolu ; l'espace et le temps restent unis : c'est la relativité dans toute sa plénitude.

Une conséquence remarquable de la courbure du temps est que le temps qui s'écoule entre deux événements se produisant, relativement à l'observateur, en un même point d'espace, parait à cet observateur d'autant plus long que le point est plus voisin d'une certaine zone où le temps est stationnaire (l'observateur ne perçoit pas le temps propre de cette zone, parce que ce temps et le sien sont orthogonaux) (note 15).

Mais ceci n'est qu'un point de vue relatif à l'observateur et ne signifie pas que le cours du temps soit arrêté dans cette zone ; si l'observateur s'y transportait, il trouverait que la Nature y est aussi active que partout ailleurs, et c'est son ancienne demeure qui lui paraîtrait immobilisée dans un repos éternel.

La lumière elle-même demanderait un temps infini pour parvenir à la zone du temps stationnaire ; alors, plus de fantômes d' étoiles, car il y a la barrière du temps ; pour l'observateur, jamais un mobile, jamais un rayon de lumière ne franchiront cette barrière. Et pourtant, si l'observateur pouvait mesurer la vitesse d'un mobile à mesure qu'il s'éloigne, il trouverait que cette vitesse (et à fortiori celle de la lumière) croît indéfiniment ! Ce serait, pour l'homme auquel il manque une dimension pour percevoir directement la courbure, l'illusion complète d'un Univers infini dans l'espace comme il est infini dans le temps.

On se demande si les déplacements des raies spectrales des nébuleuses spirales (mondes, extrêmement lointains), déplacements qui ont presque toujours lieu vers le rouge, ne seraient pas la manifestation du ralentissement apparent du temps, c'est-à-dire de la courbure du temps qui pourrait se manifester sur de si grandes distances.

## 12.4 L'accélération et la rotation

Nous avons déjà insisté sur le fait que toute accélération semble posséder un caractère absolu. L'explication est la suivante : les lignes d'Univers naturelles, ou géodésiques, ont une signification absolue : elles sont déterminées par la structure géométrique de l'Espace-Temps. En tout point-événement, il existe un Univers tangent, l'Univers euclidien de l'observateur en chute libre ; dans un système de référence lié à cet observateur, ou dans un système en translation uniforme par rapport à lui, les géodésiques peuvent être à très peu près confondues avec des droites d'Univers dans une grande étendue. Le mouvement de translation uniforme n'a aucun caractère absolu puisqu'il conserve aux géodésiques leur forme rectiligne ; il ne peut pas être déterminé par rapport aux géodésiques. Au contraire toute accélération (et en particulier toute rotation) par rapport à ces lignes d'Univers a une réalité objective. C'est cette réalité qui est observée avec le pendule de Foucault qui permet de constater la rotation de la terre.

## 12.5 La structure d'Univers et l'éther

L'Univers possède une structure géométrique connexe de la présence de matière ou d'énergie électromagnétique, puisque le champ de gravitation qui règne au voisinage de la matière(ou de l'énergie) n'est autre chose qu'une déformation de l'Espace-Temps.

Si l'on cherche à préciser la relation qui doit exister entre la structure de l'Espace-Temps et la matière, deux points de vue opposés peuvent être envisagés.

1. On peut attribuer à la matière, ou plus exactement aux électrons qui la composent, un rôle primordial. Ce point de vue paraît conforme à la conception de l'Univers cylindrique d'Einstein, car il résulte des formules de la solution d'Einstein que la courbure d'ensemble de l'Univers est déterminée par la quantité totale de matière existante ; on trouve que le rayon $U$ de l'Univers est lié à la masse totale $M$ de la matière mondiale par la relation
$$U = \frac{\chi}{4\,\pi^2} M$$
( $\chi$ est la constante de la formule 22, p. 109).

   de sorte que, si par un miracle de la matière venait à être créée dans l'espace existant, le volume de cet espace augmenterait ; la matière crée, en quelque sorte, l'espace qui la contient, et s'il n'y avait pas de matière, il n'y aurait pas d'Univers.

2. Une autre théorie, soutenue par M. Eddington, est la suivante : "Je préfère, dit M. Eddington, regarder la matière et l'énergie, non pas comme des facteurs produisant les différents degrés de courbure de l'espace, mais comme des éléments de perception de cette courbure."

Cette manière de voir est en accord avec la solution de de Sitter, car dans cette solution il n'y a aucune relation entre le rayon d'Univers et la masse totale de la matière. L'Univers a une courbure naturelle ; la matière n'est pas la cause de la courbure d'ensemble ; elle correspond à des sortes de montagnes ou de rides, irrégularités locales par lesquelles l'Univers est bien moins altéré que ne l'est la terre par le relief du sol. D'après cette théorie on pourrait concevoir un Univers vide de matière.

Dans cette hypothèse de la courbure naturelle. les lois générales sont des identifications de grandeurs physiques avec des grandeurs géométriques, et on peut les considérer comme des définitions de grandeurs physiques. Si la courbure totale est $4\lambda$ et si, de plus, le tenseur $R'_{\mu\nu}$ est nul, *nous disons qu'il y a le vide* : cette structure géométrique se manifeste à nous sous un aspect particulier que nous appelons le vide. Si la courbure totale est encore $4\lambda$, mais si $R'_{\mu\nu}$ n'est plus nul, nous disons qu'il y a de l'énergie rayonnante ; si enfin la courbure totale est différente de $4\lambda$ nous sommes en présence dune structure géométrique que nous appelons *matière*, et ce que nous appelons densité propre n'est autre chose que l'invariant géométrique $\frac{1}{\chi}(R - 4\lambda)$

Le rôle primordial est attribué à l'Espace- Temps, dont les divers degrés de courbure nous apparaissent sous des aspects que nos sens distinguent les uns des autres, et auxquels nous avons donné les noms de vide, rayonnement, matière. Cette manière de voir nous parait trés séduisante par sa logique et sa simplicité [3].

C'est un retour à l'hypothèse d'un "substratum universel ", de *l'éther* par conséquent, mais cet éther est bien différent de celui des anciennes théories.

*L'espace vide de matière n'est pas amorphe*, car la théorie de la relativité, qui ramène la mécanique et la physique à la géométrie de Riemann, prouve que l'Univers possède des propriétés métriques en relation avec la matière présente ou avoisinante. Ces propriétés sont précisées, dans chaque système de référence, par les valeurs des dix potentiels $g_{\mu\nu}$ du champ de gravitation et aussi, d'après une généralisation due à M. Weyl, par les valeurs de quatre grandeurs qui constituent les composantes d'un quadrivecteur, le potentiel électromagnétique.

On doit, aussi bien dans l'hypothèse cosmologique d'Einstein que dans celle de de Sitter. écarter la conception que l'espace, serait physiquement vide, au sens du néant absolu ; il faut, non pas supprimer l'éther, mais donner une forme nouvelle à la notion du substratum universel : l'éther de la relativité n'a rien de commun avec le milieu matériel admis autrefois : c'est "un milieu privé de toutes les propriétés mécaniques et cinématiques, mais qui détermine les phénomènes mécaniques et électromagnétiques " (Einstein). D'après Einstein, l'éther "détermine les relations métriques dans le continuum spatio-temporel,

3. Signalons qu'avec cette interprétation une difficulté se présente au sujet du principe de moindre action. Toutefois cette difficulté semble pouvoir disparaître dans les extensions de la théorie d'Einstein dont il sera question plus loin.

par exemple les possibilités de configuration des corps solides aussi bien que les champs de gravitation".

Deux extensions successives de la théorie d'Einstein, dues à M. Weyl et à M. Eddington, paraissent apporter un complément fondamental. Grâce à l'union, en une géométrie unique, du champ de gravitation et du champ électromagnétique, on peut concevoir que les électrons ( et par suite la matière) soient des états particuliers de la structure d'Univers, de l'éther au sens qu'on doit attribuer aujourd'hui à ce mot.

En résumé l'espace possède des propriétés physiques, et l'on peut exprimer ce fait en disant qu'un "éther" existe. Mais "cet éther ne doit pas être conçu comme étant doué de la propriété qui caractérise les milieux pondérables, c'est-à-dire comme constitué de parties pouvant être suivies dans le temps : la notion de mouvement ne doit pas lui être appliquée " (Einstein).

On peut dire encore, avec M. Eddington, que l'éther est incapable de créer une division de l'Univers en espace et en temps.

# Chapitre 13

# Conclusions générales

La loi de la gravitation est maintenant connue : elle englobe toute la dynamique et bouleverse les anciennes conceptions. Jusqu'a la découverte d'Einstein, non seulement on ignorait la loi exacte, mais on était bien loin de soupçonner la nature du champ de gravitation : on est certain aujourd'hui que ce champ est la manifestation du caractère non euclidien de la structure géométrique de l'Univers.

L'Univers est caractérisé, en chaque point-événement, par ses propriétés géométriques, liées a la présence ou au voisinage de la matière. L'espace n'est ni un vide amorphe, ni l'éther quasi-matériel de l'ancienne physique, et il ne doit pas être infini.

Le temps est l'aspect d'une des dimensions de la multiplicité quadridimensionnelle qui constitue l'Univers ; il reste très mystérieux. S'il existe un système de référence privilégié auquel est lié un "temps d'Univers absolu" (hypothèse d'Einstein), ce temps absolu n'est pas, en toute rigueur, celui que nous percevons et que nous pouvons mesurer ; pour nous il y a toujours, suivant la conception de Minkowski, union de l'espace et du temps : la division de l'Univers en espace et en temps n'est possible qu'en choisissant convenablement les coordonnées, et elle est relative à l'observateur.

Toutefois, les phénomènes de la Nature ont un caractère absolu, parce qu'ils sont déterminés par des coïncidences absolues dans l'Espace-Temps, des intersections de lignes d'Univers. Il y a des réalités que la Science peut atteindre : elles se traduisent par des lois qui s'expriment à l'aide d'équations intrinsèques, de relations *tensorielles* où tout système de coordonnées a disparu.

Cependant la théorie de la relativité ne remonte pas aux causes profondes des phénomènes ; elle ne fait pas connaître la nature du substratum universel. C'est une description en langage mathématique, une interprétation géométrique des lois physiques et une magnifique synthèse de ces lois. C'est, dit M.

Eddington, "la science de la structure et non celle de la substance ".

La mécanique et la physique sont ramenées à la géométrie non-euclidienne de Riemann, ou plus exactement à la géométrie plus générale encore de MM. Weyl et Eddington (note 15) ; c'est là le fond de la théorie. Dans la géométrie, on groupe dans un tenseur des grandeurs inséparables les unes des autres, et l'annulation d'un tenseur (ou l'égalité de deux tenseurs) exprime une propriété intrinsèque de l'Univers. En mécanique et en physique, on forme des tenseurs avec des grandeurs que nous révèle notre science expérimentale ; la théorie de la relativité affirme que les tenseurs mécaniques et physiques fondamentaux doivent être égalés à certains tenseurs de la géométrie riemannienne.

Les tenseurs mécaniques et physiques sont égaux à des tenseurs géométriques : cela ne saurait être mis en doute, mais comment faut-il comprendre ces égalités ? *S'agit-il d' "équations" ou d' "identités" ?* La loi de la gravitation, celles de l' électromagnétisme sont-elles des conditions imposées par la Nature aux relations entre la matière et l'Espace-Temps, ou ne sont-elles que des identifications de l'aspect physique et de l'aspect géométrique des propriétés d'une même entité ? Si l'Espace-Temps et la matière sont deux entités distinctes, les lois fondamentales sont des équations. Mais si l'on admet, avec M. Eddington, que les particules qui, en dernière analyse, constituent la matière ne sont autre chose qu'une structure géométrique d'Univers, la matière cesse d'être une entité primordiale, les tenseurs mécaniques et physiques deviennent des tenseurs géométriques *vus sous un aspect relatif à notre interprétation de la Nature, relatif à notre entendement.*

Admettons cette conception. Est-ce dire que la loi de la gravitation est complètement subjective ? Non pas, au fond, car il existe un théorème de géométrie, qui se traduit par les quatre identités dont nous avons parlé (p. 108) ; c'est là une propriété intrinsèque de la multiplicité quadridimensionnelle qui constitue l'Univers, c'est une vérité objective. Mais la loi de conservation de l'impulsion-énergie et la loi de la gravitation sont des aspects subjectifs de cette vérité. L'homme a recherché ce qui, dans la Nature, se présente à ses yeux comme permanent : il a trouvé les lois de conservation de la masse, de l'énergie, de la quantité de mouvement ; par synthèses successives, il a été conduit à identifier les grandeurs physiques qu'on peut grouper dans le tenseur matériel $T_{\mu\nu}$ avec celles qui constituent un tenseur géométrique, le tenseur $R'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R'$ (éq.25, p. 119) dont le théorème mentionné plus haut exprime précisément les propriétés de permanence : c'est la loi de la gravitation, d'où découle toute la dynamique. On ne peut pas prétendre que la Nature force la matière à suivre cette loi, car c'est nous qui définissons la matière de façon que cette loi soit satisfaite : ce que nous avons appelé tenseur matériel ou tenseur impulsion-énergie n'est pas autre chose qu'un certain tenseur d'Univers conservatif ; notre loi de conservation ainsi que notre loi de la gravitation n'expriment, au fond, que des identités.

Nous avons fait allusion à deux généralisations successives de la théorie d'Einstein. Ces généralisations (Weyl et Eddington) complètent la théorie d'Einstein sans l'altérer ; leur intérêt est considérable. Partant des propriétés géométriques les plus générales que doit posséder un univers quadridimensionnel. M. Eddington a montré qu'il doit exister deux catégories de propriétés qui correspondent à ce que les mathématiciens peuvent appeler la non-intégrabilité de la direction et la non-intégrabilité de la longueur ; il doit en résulter, à nos yeux, deux catégories de phénomènes, *deux champs de force de natures différentes*. La quadruple indétermination des coordonnées doit se traduire par quatre formules qui expriment une loi de conservation ; mais ce n'est pas tout : l'indétermination du système de mesures, c'est-à-dire, l'indétermination de l'unité choisie en chaque point pour la mesure des intervalles, doit donner une autre loi de conservation.

C'est exactement ce que l'expérience nous révèle. Nous connaissons deux champs de force : le champ de gravitation et le champ électromagnétique ; la conservation de l'impulsion-énergie est une loi expérimentale qui s'exprime par quatre équations ; l'autre loi, bien connue, est celle de la conservation de l'électricité.

Quelle que puisse être, dans l'avenir, l'évolution des idées, l'union de l'espace et du temps, l'inertie et la pesanteur de l'énergie, la loi de la gravitation, la dynamique de la relativité, la courbure de l'Univers, les lois générales de l'électromagnétisme sont des résultats, presque tous dus au génie d'Einstein, qui resteront acquis à la science.

La théorie actuelle pourra être retouchée ou plutôt complétée, surtout en ce qui concerne les hypothèses cosmologiques, la généralisation de la théorie d'Einstein et l'interprétation philosophique des lois. Mais ce qu'on peut affirmer, c'est qu'un retour en arrière, vers les idées encore enracinées dans quelques esprits, est une chose impossible.

# Troisième partie

# Appendice

# Annexe A

# Relativité restreinte

## A.1 Note 1 Sur l'invariance de la distance spaciale de deux évènements simultanés

Soient $x_1$ $y_1$ $z_1$, $x_2$ $y_2$ $z_2$ les coordonnées d'espaces de deux évènements simultanés dans le premier système $S$, et soient $x'_1$ $y'_1$ $z'_1$, $x'_2$ $y'_2$ $z'_2$ les coordonnées des deux mêmes évènements dans le second système $S'$. La distance spaciale est donnée par les équations :

$$\begin{aligned} l^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \text{ dans le système } S \\ l'^2 &= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \text{ dans le système } S' \end{aligned}$$

L'application des formules du groupe de Galilée donne $l = l'$ ; le temps s'élimine parce que , la simultanité étant supposée absolue, les évènements se produisent à la même époque $t$ dans les deux systèmes.

## A.2 Note 2 Sur les équations de la dynamique classique

$m$ étant la masse d'un point matériel, $X$, $Y$, $Z$ et $X'$, $Y'$, $Z'$ désignant les composantes de la force F dans les systèmes $S$ et $S'$ non accélérés, les équations du mouvement s'écrivent :

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = X, \quad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = Y, \quad m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = Z \quad \text{(système } S\text{)}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2} = X', \quad m\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2} = Y', \quad m\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2} = Z' \quad \text{(système } S'\text{)}$$

avec la relation

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}$$

Les équations fondamentales ont la même forme dans les deux systèmes ; on peut les résumer par la relation vectorielle

$$m\vec{\gamma} = \vec{F} \text{ } (\vec{\gamma} \text{ vecteur accélération})$$

ou tout système de coordonnées a disparu.

## A.3 Note 3<br>Sur la contraction de Fitzgerald-Lorentz

Soient $l'$ le trajet optique $OM_1$ de la lumière entre la face semi-argentée de la lame $A$ et le miroir $M_1$ ; $l$ le trajet $OM_2$ entre la lame et le miroir $M_2$ ; si le bras $OM_1$ est parallèle au mouvement absolu de la terre, le temps que met la lumière à aller de $O$ au miroir $M_1$ et à revenir en $O$ est

$$t_1 = \frac{l'}{c - v} + \frac{l'}{c + v}$$

Le temps employé pour parcourir le bras $OM_2$, aller et retour, est

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Pour que $t_1 = t_2$, il faut et il suffit que

$$\frac{l'}{l} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

## A.4 Note 4<br>Remarque sur la mesure du temps

En disant que les observateurs ont des horloges étalons identiques, nous supossons qu'ils mesurent le temps en prenant comme étalon de temps la période d'un même phénomène, en choisissant un phénomène qui ne soit pas déterminé par des conditions spéciales à un système particulier : par exemple, un pendule ne pourra pas servir d'étalon universel, parce que sa période d'oscillation est déterminée par la pesanteur : mais on pourra adopter la période d'une radiation émise par un corps et prendre pour unité de temps, dans tous les systèmes, un même multiple de cette période.

## A.5 Note 5<br>Le groupe de Lorentz

Soit un même évènement noté $x_0$, $y_0$, $z_0$, $t_0$ par les observateurs du système $S$ et noté $x'_0$, $y'_0$, $z'_0$, $t'_0$ par les observateurs du système $S'$ en translation uniforme avec le vitesse $v$ par rapport à $S$

Cherchons les fonctions $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ satisfaisant aux relations

$$\begin{array}{l} x' - x'_0 = f_1(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0) \\ \dots \\ t' - t'_0 = f_4(x - x_0, y - y_0, z - z_0, t - t_0) \end{array}$$

Si l'on suppose la combinaison de l'espace et du temps *homogène*, ces formules doivant s'appliquer quel que soit l'évènement de référence $(x_0, y_0, z_0, t_0)$ ou $(x'_0, y'_0, z'_0, t'_0)$ et l'on trouve aisément la forme des fonctions : considérons trois évènements (indices 0, 1, 2), nous aurons

$$\begin{array}{l} x'_1 - x'_0 = f_1(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0, t_1 - t_0) \\ x'_2 - x'_1 = f_1(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, t_2 - t_1) \\ x'_2 - x'_0 = f_1(x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0, t_2 - t_0) \end{array}$$

D'où

$$f_1(x_2 - x_0, \dots) = f_1(x_2 - x_1, \dots) + f_1(x_1 - x_0, \dots)$$

équations fonctionelle qui montre que $f1$ *est une fonction linéaire et homogène de ses arguments* ; il en est de même de $f_2$, $f_3$, $f_4$.

Prenons maintenant comme premier évènement l'émission d'un signal lumineux en $O$ et $O'$ à l'origine des temps ; au bout du temps $t$, pour l'observateur du système $S$, le signal lumineux est sur la surface de la sphère du système $S$

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2\ t^2 = 0$$

*la vitesse de la lumière étant une constante universelle*, pour l'observateur du système $S'$, le signal est au bout du temps $t'$ sur la sphère du système $S'$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2\ t'^2 = 0$$

Si $x$, $y$, $z$, $t$, $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ sont les coordonnées d'un même appareil qui reçoit le signal (second évènement), on a

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2\ t^2 = \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2\ t'^2) = 0$$

*Les lois des phénomènes ne devant pas changer quand on passe de $S$ à $S'$ et réciproquement*, on a nécessairement $\lambda = 1$ et

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2\, t^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2\, t'^2 \tag{A.1}$$

La disposition d'axes choisie exige que :

$$\left\{\begin{array}{cccc} \text{quel que soient} & y \text{ et } z & \text{on ait à la fois} & x' = 0 \text{ et } x = v\, t \\ \text{—} & x,\, z \text{ et } t & \text{—} & y' = 0 \text{ et } y = 0 \\ \text{—} & x,\, y \text{ et } t & \text{—} & z' = 0 \text{ et } z = 0 \end{array}\right. \tag{A.2}$$

Les équations linéaires et homogènes qui donnent $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ en fonction des $x$, $y$, $z$, $t$ contiennent dans le cas général 16 coéficients fonctions de $v$ ; avec la disposition envisagée, en vertu des conditions (A.2), il ne reste que 7 coéficients ; on les calcule aisément d'après l'*identité (A.1)* et l'on trouve les formules de Lorentz.

## A.6 Note 6 La composition des vitesses

Différencions les équations de Lorentz

$$\mathrm{d}x = \tfrac{1}{\alpha}(\mathrm{d}x' + v\ \mathrm{d}t'),\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}y',\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}z',$$

$$\mathrm{d}t = \tfrac{1}{\alpha}(\mathrm{d}t' + \tfrac{v}{c^2}\mathrm{d}x')$$

Divisant les trois premières de ces équations par la dernière, nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{ccccc} v''_x & = & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = & \frac{v+v'_{x'}}{1+\frac{v\,v'_{x'}}{c^2}} \\ v''_y & = & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & = & \frac{v'_{y'}}{1+\frac{v\,v'_{x'}}{c^2}} \\ v''_z & = & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} & = & \frac{v'_{z'}}{1+\frac{v\,v'_{x'}}{c^2}} \end{array}\right. \tag{A.3}$$

En particulier si, comme nous l'avons supposé dans le texte, $v'$ est parallèle à $v$, on a

$$v' = \frac{v + v'}{1 + \frac{v\,v'}{c^2}} \tag{A.4}$$

## A.7 Note 7 Contraction des longueurs et dilatation du temps

Soient $x_1$, $x_2$ et $x'_1$, $x'_2$ les abscisses des deux extrémités de la tige dans les systèmes $S$ et $S'$ ; la première des formules de Lorentz

$$x' = \frac{1}{\alpha}(x - v\ t)$$

appliquée aux deux points extrémités de la tige, *à un même instant $t$ du système $S$*, donne

$$x'_2 - x'_1 = \tfrac{1}{\alpha}(x_2 - x_1) \quad \text{ou} \quad l = \alpha\ l' \tag{A.5}$$

D'autre part, considérons une horloge du système S' et deux évènements infiniments voisins se produisant sur cette horloge ; nous avons : invariant $\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t'^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2$ avec $\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t$.

D'où

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\mathrm{d}t' \tag{A.6}$$

Soit maintenant une tige infiniment courte dirigée parallèlement à la vitesse, immobile dans le système $S'$ et de longueur $\mathrm{d}x'$ dans ce système ; considérons deux évènements infiniment voisins concernant cette tige ; d'après (A.5) et (A.6), l'observateur du système $S$ mesure :

$$\mathrm{d}x = \alpha\,\mathrm{d}x' \quad \text{et} \quad \mathrm{d}t = \tfrac{1}{\alpha}\mathrm{d}t'$$

On a donc

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}t' \tag{A.7}$$

## Invariance de l'hypervolume d'univers

Avec des tiges de longueurs au repos $\mathrm{d}x'$, $\mathrm{d}y'$, $\mathrm{d}z'$ dirigées parallèlement aux axes, formons un parallélipipède rectangle immobile dans $S'$ ; soit $\mathrm{d}t'$ un intervalle de temps infiniment court marqué par une horloge au centre du parallélipipède ; comme, avec notre choix d'axes, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}y'$ et $\mathrm{d}z = \mathrm{d}z'$, nous obtenons

$$\mathrm{d}x\, udy\, udz\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x'\, udy'\, udz'\,\mathrm{d}t' \tag{A.8}$$

ou encore en prenant comme coordonnée de temps la longueur $u = c\,t$

$$\mathrm{d}x\, udy\, udz\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x'\, udy'\, udz'\,\mathrm{d}u' \tag{A.9}$$

## A.8 Note 8<br>Sur le temps propre

Considérons deux mobiles $M_1$ et $M_2$ en coïncidence absolue aux évènements $A$ et $B$, et ayant entre ces évènements, des lignes d'Univers différentes. Supposons que $M_1$ soit en translation uniforme ; $M_2$ a alors nécessairement subi une accélération entre les deux évènements considérés. Repérons les évènements dans un système $S$ (en translation uniforme) lié à $M_1$.

Prenons deux époques $t$ et $t+\mathrm{d}t$ du temps du système $S$, comprises entre les époques $t_A$ et $t_B$ auxquelles se produisent, toujours dans le système $S$ lié à $M_1$, les évènements $A$ et $B$. Aux époques $t$ et $t+\mathrm{d}t$, le second mobile $M_2$ est repéré $x$, $y$, $z$, $t$ ; $x+\mathrm{d}x$, $y+\mathrm{d}y$, $z+\mathrm{d}z$, $t+\mathrm{d}t$ dans le système $S$ ; ces coordonnées déterminent, sur la ligne d'Univers de $M_2$, deux évènements infiniment voisins dont l'intervalle est $\mathrm{d}s$ ; on a

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 + c^2\,\mathrm{d}t^2$$

mais on a aussi

$$\mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}\tau \ ,$$

par conséquent

$$\mathrm{d}s = \alpha\, c\,\mathrm{d}t, \text{ ou } \ \mathrm{d}\tau = \alpha\,\mathrm{d}t \qquad \left(\alpha = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \tag{A.10}$$

Les mobiles $M_1$ et $M_2$ étant en coïncidence absolue aux évènements $A$ et $B$, nous obtenons par intégration,

$$\int_A^B \mathrm{d}\tau = \int_{t_A}^{t_B} \alpha\,\mathrm{d}t \tag{A.11}$$

Plus le mouvement de $M_2$ aura été accéléré, plus par conséquent, les vitesse par rapport à $M_1$ seront grandes puisque la durée totale $t_B - t_A$ est fixe, et plus le temps propre sera court.

En d'autres termes, entre deux évènements déterminés, la plus longue ligne d'Univers est celle qui correspond au mouvement rectiligne et uniforme.

## A.9 Note 9<br>La loi d'inertie

Une fonction a une variation nulle lorsqu'elle passe par un minimum ou par un maximum. Donc, pour la ligne géométrique la plus courte on a

$\delta \int \mathrm{d}l = 0$, et pour la ligne d'Univers la plus longue on a

$$\delta \int \mathrm{d}s = 0 \tag{A.12}$$

Dans un cas comme dans l'autre, l'énoncé sous forme de *loi d'action stationnaire* est le même. La formule (A.12) est l'expression intrinsèque, indépendante de tout système de coordonnées, de la loi d'inertie.

# A.10 Note 10

## A.10.1 Le champ électromagnétique

Dans un système de référence $S$, soient au point $x$, $y$, $z$ et à l'instant $t$ : $X$, $Y$, $Z$ les composantes de la force électrique, $L$, $M$, $N$ les composantes de l'induction magnétique, $P$ la densité de charge multipliée par $4\pi$, $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ les composantes de la vitesse de la charge supposée en mouvement (courant de convection). Les équations de Maxwell-Lorentz s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{c}\,\frac{\delta L}{\delta t} = \frac{\delta Z}{\delta y} - \frac{\delta Y}{\delta z} \\[2ex] -\frac{1}{c}\,\frac{\delta M}{\delta t} = \frac{\delta X}{\delta z} - \frac{\delta Z}{\delta x} \\[2ex] -\frac{1}{c}\,\frac{\delta N}{\delta t} = \frac{\delta Y}{\delta x} - \frac{\delta X}{\delta y} \\[2ex] \mathrm{Div}(L, M, N) = \frac{\delta L}{\delta x} + \frac{\delta M}{\delta y} + \frac{\delta N}{\delta z} = 0 \end{array}\right. \tag{A.13}$$

$$\left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{c}\,\left(\frac{\delta X}{\delta t} + \rho\,\omega_x\right) = \frac{\delta N}{\delta y} - \frac{\delta M}{\delta z} \\[2ex] -\frac{1}{c}\,\left(\frac{\delta Y}{\delta t} + \rho\,\omega_y\right) = \frac{\delta L}{\delta z} - \frac{\delta N}{\delta x} \\[2ex] -\frac{1}{c}\,\left(\frac{\delta Z}{\delta t} + \rho\,\omega_x\right) = \frac{\delta M}{\delta x} - \frac{\delta L}{\delta y} \\[2ex] \mathrm{Div}(X, Y, Z) = \frac{\delta X}{\delta x} + \frac{\delta Y}{\delta y} + \frac{\delta Z}{\delta z} = P \end{array}\right. \tag{A.14}$$

Dans un système de référence $S'$ animé de la vitesse $v$ par rapport à $S$, ces équations doivent être remplacées par des équations de même forme. Adoptons la disposition d'axes précédemment considérée ; le calcul montre que ces équations restent les même si les nouvelles grandeurs (lettre accentuées) sont liée aux anciennes par les relations suivantes :

1. Les formules de Lorentz pour les transfomations d'espace et de temps ;

2. Les formules (A.3) de composition des vitesses pour les $\omega$ ;
3. Les formules suivantes, pour la transformation des grandeurs électriques et magnétiques :

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = \frac{1}{\alpha}\left(Y - \frac{v}{c}N\right) \\ Z' = \frac{1}{\alpha}\left(Z - \frac{v}{c}M\right) \end{cases} \tag{A.15}$$

$$\begin{cases} L' = L \\ M' = \frac{1}{\alpha}\left(M - \frac{v}{c}Z\right) \\ Z' = \frac{1}{\alpha}\left(N - \frac{v}{c}Y\right) \end{cases} \tag{A.16}$$

4. $$P' = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{v\,\omega_x}{c^2}\right)P \tag{A.17}$$

   (a) Cette dernière formule donne immédiatement un résultat fondamental.

   Soit $e$ la cherge de l'élément de volume d'espace, on a

   $$P = \frac{4\pi_e}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}, \qquad p' = \frac{4\pi'_e}{\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'}$$

   de (A.17) on déduit

   $$e'\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t = e\ \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'\mathrm{d}t' \text{ ou } e = e' \text{ d'après (A.8)}$$

   *La charge électrique est un invariant.*

   (b) Les formules (A.15), (A.16) montrent qu'un champ électrique et un champ magnétique n'ont pas d'existance absolue. Par exemple, ce qui est un pur champ magnétique dans un système est un champ mixte (électrique et magnétique) dans un autre système : ceci fait comprendre l'action d'un champ magnétique sur une charge en mouvement, car, alor que dans le système de l'observateur, il existe un pur champ magnétique, *dans le systğme de la charge*, il règne un champ électrique qui agit sur elle. On retrouve facilement, d'après ces formules, la loi de Biot et Savart et la loi d'induction, qui ne subissent aucune correction dans la théorie nouvelle.

(c) Appliquées aux ondes lumineuses, les formules de transformation permettent d'établir la théorie exacte de l'effet Doppler et de l'aberration de la lumière. Les anciennes formules ne constituent que des approximations ; les formules exactes sont :

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{A.18}$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi} \tag{A.19}$$

$\nu$ est la *fréquence propre* de la source et $\nu'$ la fréquance apparente pour l'observateur. $\varphi$ est l'angle de la vitesse $v$ et du rayon lumineux dans le système $S$ de la source. $\varphi'$ est l'angle de la vitesse $v$ et du rayon reçu par l'observateur.

L'énergie lumineuse se transforme suivant la même loi que la fréquence :

$$W' = W \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{A.20}$$

On trouve enfin l'expression de la pression de la lumière sur un réflecteur intégral, animé de la vitesse $v$ par rapport à l'observateur :

$$p = 2\,\frac{A^2}{8\pi}\,\frac{\left(\cos\varphi - \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{A.21}$$

$A$ étant l'amplitude des ondes, pour l'observateur.

## A.10.2 Dynamique de la relativité

1. La masse est fonction de la vitesse : Dans un système $S$, un point matériel est supposé en mouvement avec la vitesse $v$ à l'instant $t$.

   Introduisons un second système $S'$ animé de la vitesse $v$ par rapport à $S$. Dans $S'$, à l'instant considéré, le mobile a une vitesse nulle ; pendant le temps infiniment court qui suit, nous pouvons dans le système $S'$ appliquer les équations de la dynamique classique puisque le mobile part du repos dans ce système.

   Soient $m_0$ la masse initiale ou masse au repos du point matériel ; $F'_{x'}$, $F'_{y'}$, $F'_{z'}$, les composantes, mesurées par un observateur du système $S'$, de la force que subit ce point ; nous avons :

$$m_0 \frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t'^2} = F'_{x'}, \quad m_0 \frac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}t'^2} = F'_{y'}, \quad m_0 \frac{\mathrm{d}^2 z'}{\mathrm{d}t'^2} = F'_{z'} \tag{A.22}$$

Pour avoir les équations de la dynamique dans le système $S$, il faut chercher comment se transforme $\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t'^2}$, $\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t'^2}$ , $\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t'^2}$ et $F'_{x'}$, $F'_{y'}$, $F'_{z'}$ en fonction des mesures faites dans le système $S$.

Adoptons la disposition d'axes habituelle, en prenant $Ox$ et $O'x$ parallèles à $v$. Les formules de Lorentz permettent de calculer $\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t'^2}$ ... en fonction de $v$ et de $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ ..., en tenant compte de ce que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$ à l'instant t considéré. On trouve :

$$\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t'^2} = \frac{1}{\alpha^3}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t'^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t'^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \tag{A.23}$$

Pour obtenir la transformation des $F'_{x'}$, $F'_{y'}$, $F'_{z'}$ nous considérons le cas d'une force électrique ; supossons que dans $S$ règne un champ électrique $X$, $Y$, $Z$ ; pour les observateurs de ce système, il s'exerce sur une particule de charge $e$ une force

$$F_x = e\,X, \qquad F_y = e\,Y, \qquad F_z = e\,Z.$$

Appliquons (A.15), en y faisant $M = N = 0$, et remarquons que $e$ est un invariant ; nous obtenons :

$$F'_{x'} = F_x, \qquad F'y' = \frac{1}{\alpha}F_y \qquad F'z' = \frac{1}{\alpha}F_z \tag{A.24}$$

substituant dans (A.22) les valeurs de l'accélération (A.23) et de la force (A.24) il vient :

$$\frac{m_0}{\alpha^3}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x, \quad \frac{m_0}{\alpha}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F_y, \quad \frac{m_0}{\alpha}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = F_z \tag{A.25}$$

Bien qu'établies dans le cas particulier de la force électrique ces équations s'appliquent à une force quelconque, car si une force mécanique (par exemple la tension d'un ressort) fait équilibre à l'action exercée par un champ électrique, c'est un fait sur lequel tous les observateurs doivent se trouver d'accord. Il est donc nécessaire que les composantes de la force mécanique se transforment comme celle de la force électrique.

On trouve ainsi une *masse longitudinale* $\frac{m_0}{\alpha^3}$ et une *masse transversale* $\frac{m_0}{\alpha}$, la masse étant définie comme coéfficient d'inertie.

Mais les équations (A.25) peuvent s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = F_x, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = F_y, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) = F_z \tag{A.26}$$

Sous cette forme symétrique, la restriction due au choix particulier des axes est levée ; les équations sont absolument générales. $F_x\,\mathrm{d}t$, $F_y\,\mathrm{d}t$, $F_z\,\mathrm{d}t$ sont les composantes de l'impulsion $\mathrm{d}G$ ; on a donc, en intégrant et prenant la quantité de mouvement nulle au repos :

$$\frac{m_0}{\alpha}\,\vec{v} = \vec{G} \tag{A.27}$$

La masse définie comme capacité d'impulsion est $\frac{m_0}{\alpha}$.

2. L'inertie de l'énergie : Multipliant les équations (A.26) par $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ et ajoutant, on obtient :

$$\mathrm{d}\left(\frac{m_0}{\alpha}\,c^2\right) = \mathrm{d}(m\,c^2) = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z = \mathrm{d}W$$

$\mathrm{d}W$ étant l'énergie fournie au point matériel.
On a donc :

$$m\,c^2 = W + C^{te} \tag{A.28}$$

La variation de masse est proportionnelle à la variation d'énergie cinétique.

(a) *Masse de l'énergie rayonnante* : considérons un train d'ondes planes tombant normalement sur une surface noire $S$. L'énergie $\delta W$ absorbée pendant le temps $\delta t$ exerce une pression $p = \frac{\delta W}{S\,c\,\delta t}$ (égale à la densité de l'énergie) ; Elle communique au corps absorbant une implulsion

$$\delta G = p\,S\,\delta t = \frac{\delta W}{c}$$

L'énergie rayonnante $W$ posséde donc une quantité de mouvement $G = \frac{W}{c}$ c'est-à-dire une masse (capacité d'impulsion) $\frac{W}{c^2}$. On a la relation (A.28) avec une constante nulle.

(b) Un corps qui rayonne éprouve une perte de masse égale à la masse $\frac{W}{c^2}$ de l'énergie rayonnée $W$. Prenons un cas simple : une lame plane normale à $Ox$ rayonne par ces deux faces, avec la même intensité, des ondes planes se propageant de part et d'autre normalement à son plan.

Dans un système de référence $S$ par rapport auquel elle était immobile avant de rayonner, la source envoie, de part et d'autre , des quantités de mouvement électromagnétique égales et opposées ; elle reste donc immobile. Soit $W$ une certaine quantité d'énergie rayonnée $\left(\frac{W}{2}\right.$ de chaque côté$\left.\right)$, mesurée par un observateur du système $S$.

Pour un second observateur $S'$ animé, par rapport à la source, d'une vitesse $v$ parallèlement à $Ox$, l'énergie se transforme d'après (A.20) (où $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$).

Cet observateur mesure

$$W' = \frac{1}{\alpha}\frac{W}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

pour l'énergie envoyée dans la direction et le sens de $v$ et

$$W'' = \frac{1}{\alpha}\frac{W}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

dans le sens opposé.

La quantité de mouvement qui s'est propagée, pour $S'$ dans le sens de $v$ est

$$\frac{W'}{c} - \frac{W''}{c} = \frac{1}{\alpha}\frac{W}{c^2}(-v) \tag{A.29}$$

$(-v)$ est la vitesse de la source pour $S'$. D'après la concervation de la quantité de mouvement, $\frac{1}{\alpha}\frac{W}{c^2}(-v)$ est la quantité de mouvement perdue par la lame. Comme la vitesse n'a pas changé, cette variation provient d'une variation de la masse de la lame

$$\frac{1}{\alpha}\frac{W}{c^2}\text{pour l'observateur } S'$$

et $\frac{W}{c^2}$ pour l'observateur S immobile par rapport à la source.

La lame a donc éprouvé une perte de masse au repos $\frac{W}{c^2}$ précisément égale à la masse de l'énergie rayonnée.

(c) L'énergie potentielle totale d'un électron est égale à sa masse au repos multipliée par $c^2$ (M. Langevin). Assimilons l'électron à une sphère de rayon $a$ possédant une charge superficielle $e$

L'énergie potentielle du champ électrostatique $h$ est :

$$\begin{aligned} W_1 &= \tfrac{1}{8\pi}\iiint h^2 \mathrm{d}V = \tfrac{e^2}{8\pi}\iiint \tfrac{1}{r^4}\mathrm{d}V \\ &= \tfrac{e^2}{8\pi}\int_a^\infty \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \tfrac{\sin\theta}{r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \tfrac{e^2}{2a} \end{aligned}$$

Soient $\sigma = \frac{e}{4\pi a^2}$ la densité superficielle de charge, $p$ la pression de Poincarré, nécessaire pour admettre que la charge ne se dissipe pas. La pression $p$ fait équilibre à la tension $2\pi\sigma^2$ résultant de la répulsion mutuelle des éléments qui composent la charge.

On a donc

$$p = 2\,\pi\,\sigma^2 = \frac{e^2}{8\,\pi\,a^4}$$

Il en résulte une énergie potentielle $W_2$ égale au produit de $p$ par le volume de l'électron.

$$W_2 = \frac{4}{3}\pi\,a^3\,p = \frac{1}{6}\frac{e^2}{a}$$

L'énergie potentielle totale de l'électron au repos est ainsi

$$W = W_1 + W_2 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{a} \tag{A.30}$$

Or la masse de l'électron est $\frac{1}{c^2}\frac{2}{3}\frac{e^2}{a}$ ; on a par la suite $m\,c^2 = W$.
*Généralisation* : dans tous les cas où l'on peut calculer l'énergie totale $W$ d'un système, on la trouve égale à $m\,c^2$. On est donc conduit à généraliser et à donner les lois énoncées page ? ? ? ?.

3. L'impulsion D'univers. Soit $\mathrm{d}\tau$ l'élément de *temps propre* d'un point matériel $\left(\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c}\mathrm{d}s\right)$. Les dérivées

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}, \qquad \frac{c\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$$

se transforment comme les composantes $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, $c\,\mathrm{d}t$, d'un déplacement élémentaire, puisque $\mathrm{d}\tau$ est un invariant. Ce sont donc les composantes d'un quadrivecteur, la *vitesse généralisée*.

Multiplions par l'invariant $m_0$ (masse au repos) les composantes de ce quadrivecteur ; nous avons les composantes de l'*impulsion d'Univers*,

$$m_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \qquad m_0\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}, \qquad m_0\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}, \qquad m_0\,c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$$

qui s'écrivent, puisque $\mathrm{d}\tau = \alpha\,\mathrm{d}t$ et $m = \frac{m_0}{\alpha}$

$$m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \qquad m\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}, \qquad m\,c \tag{A.31}$$

Les trois premières composantes (composantes d'espace) sont les composante de la quantité de mouvement ; la quatrième (composante de temps) est l'énergie divisée par $c$.

La concervation de la quantité de mouvement et la concervation de l'énergie qui, pour un système de points matériels isolés, s'écrivent :

$$\sum G_x = C^{te}, \quad \sum G_y = C^{te}, \quad \sum G_z = C^{te}, \quad \sum W = C^{te} \tag{A.32}$$

se résument maintenant dans l'affirmation que la *somme des vecteurs impulsions d'Univers, somme entendue au sens géométrique reste constante dans un système matériel isolé*. Elle est indépendante du système de référence, alors que la quantité de mouvement et l'énergie varient d'un système de référence à l'autre. Le principe de la conservation de l'impulsion d'Univers a seul un sens absolu.

# Annexe B

# Relativité Généralisée

## B.1 Note 11<br>Les tenseurs

### B.1.1 Transformation du déplacement élémentaire

Passons d'un système de coordonnées ($x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$) à un autre système ($x'_1$, $x'_2$, $x'_3$, $x'_4$) l'éléments de ligne se transforme d'après les quatres équations

$$\mathrm{d}x'_1 = \tfrac{\delta_{x'_1}}{\delta_{x_1}}\,\mathrm{d}x_1 + \tfrac{\delta_{x'_1}}{\delta_{x_2}}\,\mathrm{d}x_2 + \tfrac{\delta_{x'_1}}{\delta_{x_3}}\,\mathrm{d}x_3 + \tfrac{\delta_{x'_1}}{\delta_{x_4}}\,\mathrm{d}x_4$$

$$\ldots$$

qu'on résume sous la forme abrégée

$$\mathrm{d}x'_\sigma = \sum_\nu \frac{\delta_{x'_\sigma}}{\delta_{x_\nu}}\,\mathrm{d}x_\nu \tag{B.1}$$

$\sigma$ étant le même indice dans les deux membres et la sommation étant faite pour chaque indice $\sigma$, en remplaçant $\nu$ successivement par 1, 2, 3, 4.

### B.1.2 Quadrivecteurs

Tout groupe de quatre quantités $A^\nu$ qui se transforment suivant la même loi que les $\mathrm{d}x_\nu$

$$A'^\sigma = \sum_\nu \frac{\delta_{x'_\sigma}}{\delta_{x_\nu}}\,A^\nu \tag{B.2}$$

constitue un quadrivecteur ou *tenseur de premier ordre contrevariant.* On met l'indice en haut (sauf pour $\mathrm{d}x_\nu$ qui est cependant contrevariant).

Tout groupe de quatre quantités $B_\nu$ (indice en bas) qui se transforme suivant la loi

$$B'_\sigma = \sum_\nu \frac{\delta_{x_\nu}}{\delta_{x'_\sigma}} B_\nu \tag{B.3}$$

constitue un quadrivecteur ou *tenseur de premier ordre covariant.*

On voit facilement que

$$\sum_\nu A^\nu B_\nu = \sum_\sigma A'^\sigma B'_\sigma = (\text{invariant.}) \tag{B.4}$$

Un *invariant*, appelé aussi *scalaire*, est un tenseur d'ordre nul.

*Remarque.* - La sommation est faite par rapport à l'indice qui figure deux fois sous le signe $\sum$. Cet indice n'a pas de signification propre puisque dans l'expression complète d'une *même* composante on lui donne successivement les valeurs 1, 2, 3, 4 : on l'apelle *indice muet*. La lettre qui le désigne peut être à volonté remplacée par une autre pourvu que la nouvelle lettre ne figure pas déjà dans le terme considéré. Dans la suite nous supprimerons le $\sum$ ; il sera sous-entendu qu'on doit toujours sommer par rapport aux indices muets, faciles à reconnaîtres d'après ce qui vient d'être dit.

## B.1.3 Tenseurs d'ordre supérieurs

Seize grandeurs qui se transforment suivant la loi

$$A'^{\sigma\tau} = \frac{\delta x'_\sigma}{\delta x_\mu}\frac{\delta x'_\tau}{\delta x_\nu} A^{\mu\nu} \ (\sum_\mu \sum_\nu \text{ sous-entendu}) \tag{B.5}$$

sont les composants d'un *tenseur du second ordre contrevariant.*

Seize grandeurs qui se transforment suivant la loi

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\delta x_\mu}{\delta x'_\sigma}\frac{\delta x_\nu}{\delta x'_\tau} A_{\mu\nu} \tag{B.6}$$

forment un *tenseur du second ordre contrevariant.*

On généralise aisément pour définir des tenseurs d'ordre $n$. Un tenseur d'ordre $n$ possède $4^n$ composantes (dans une multiplicité à 4 dimensions). Un tenseur qui participe à la fois des deux modes de transformation est dit *mixte* : il est contrevariant vis-à-vis de certains indices et covariant vis-à-vis des autres.

$$A'^\rho_{\sigma\tau} = \frac{\delta x'_\rho}{\delta x_\epsilon}\frac{\delta x_\mu}{\delta x'_\sigma}\frac{\delta x_\nu}{\delta x'_\tau} A^\epsilon_{\mu\nu}$$

Un tenseur tel que $A_{\mu\nu\sigma\rho\ldots} = A_{\nu\mu\sigma\rho\ldots}$ est dit *symétrique* par rapport à $\mu$ et $\nu$. Un tenseur tel que $A_{\mu\nu\ldots} = -A_{\nu\mu\ldots}$ est dit *symétrique gauche* par rapport à $\mu$ et $\nu$. Un tenseur symétrique gauche d'ordre 2 possède six composantes distinctes (au signe près) ; il n'y a pas de tenseur symétrique gauche d'ordre supérieur à quatre (du moins dans une multiplicité quadridimentionnelle).

### B.1.4 Multiplication

Si l'on multiplie deux à deux les composantes d'un tenseur d'ordre $n$ et celles d'un tenseur d'ordre $n'$, on obtient un tenseur d'ordre $n + n'$.

$$A_{\alpha\beta}B^{\gamma\delta} = \Gamma^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$$

### B.1.5 Contraction

Partant d'un tenseur mixte, on peut former un tenseur d'ordre inférieur de deux unités en égalant un indice de caractère covariant et un indice contrevariant. Ex. : soit $A^{\tau}_{\mu\nu\sigma}$ ; imposons la condition $\sigma = \tau$, nous obtenons $A^{\sigma}_{\mu\nu\sigma}$ ; qui n'est plus que du second ordre et peut se représenter par $A_{\mu\nu}$. Un multiplication suivie de contraction se nomme *multiplication intérieure*

### B.1.6 Procédés pour reconnaître le caractère tensoriel

a) Lorsqu'un groupe de quantités $A(\mu\nu ... \alpha\beta)$ déterminés par $n$ indices est tel que :

$$A(\mu\nu ... \alpha\beta)B^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \text{ invariant} \tag{B.7}$$

pour un choix *arbitraire* d'un tenseur $B^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ à $n$ indices, dont $n'$ covariant et $n''$ contrevariants, on peut affirmer que $A(\mu\nu ... \alpha\beta)$ est un tenseur contrevariant d'ordre $n'$ et covariant d'ordre $n''$.

Ex. : Si $A(\mu\nu)B^{\mu}C^{\nu} =$ invariant, $A(\mu\nu)$ est un tenseur $A_{\mu\nu}$, ce résultat est encore exacte si pour un quadrivecteur *quelconque* $B^{\mu}$ le produit intérieur $A(\mu\nu)B^{\mu}B^{\nu} =$ invariant, à condition que $A(\mu\nu) = A(\nu\mu)$.

b) Un groupe de quantités dont le produit *intérieur* par un quadrivecteur *arbitraire* est un tenseur est lui-même un tenseur.

Ex. : Si $A(\mu\nu)B^{\nu}$ est un quadrivecteur covariant, $A(\mu\nu)$ est un tenseur covariant.

### B.1.7 Tenseurs fondamentaux

Dans l'expression de l'invariant $\mathrm{d}s^2$

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x_{\mu}\mathrm{d}x_{\nu} \tag{B.8}$$

$dx_\mu$ est un quadrivecteur covariant *arbitraire* ; donc d'après l'une des règles précédentes $g_{\mu\nu}$, qui est symétrique, est un tenseur covariant. C'est le tenseur covariant fondamental. *Le tenseur contrevariant fondamental* $g_{\mu\nu}$ s'obtient en écrivant le déterminant des $g_{\mu\nu}$ formant le mineur de chacun des $g_{\mu\nu}$ et divisant ce mineur par la valeur $g$ du déterminant.

D'après une propriété des déterminants on a :

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \text{ 1 ou 0 selon que}\,\mu = \nu\,\text{ou}\,\mu \neq \nu \tag{B.9}$$

Posons $g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = g^\nu_\mu$, $g^\nu_\mu$ est le *tenseur mixte fondamental.* il jouit de la propriété d'avoir les mêmes composantes (égale à 1 pour $\mu = \nu$ et à 0 pour $\mu \neq \nu$) dans tous les systèmes.

Remarquons qu'en contractant ce tenseur nous obtenons

$$g^\mu_\mu = g^1_1 + g^2_2 + g^3_3 + g^4_4 = 4 \tag{B.10}$$

Remarquons aussi que $g^\nu_\mu$ est un *opérateur de substitution*, car

$$g^\nu_\mu A^\mu = A^\nu + 0 + 0 + 0 \tag{B.11}$$

### B.1.8 Tenseurs associés

Les trois tenseurs fondamentaux permettent de transformer les tenseurs par multiplication intérieure, c'est-à-dire de construire de nouveaux tenseurs en faisant passer à volonté un indice de bas en haut et inversément. les trois tenseurs contrevariant, mixte et covariant

$$A^{\mu\nu},\; A^\nu_\mu = g_{\mu\alpha}A^{\nu\alpha}\ (\alpha \text{ est indice muet}),\; A^\nu_\mu = g_{\mu\alpha}A^\alpha_\nu \tag{B.12}$$

sont dits tenseurs associés.

Tout tenseur d'ordre pair permet de former un invariant appelé *invariant contracté* ; il suffit d'amener la moitié des indices en haut, la moitié en bas et de contracter complètement.

### B.1.9 Longueur généralisée - condition d'ortogonalité

Dans la théorie vectorielle ordinaire (3 dimensions) le produit scalaire de deux vecteurs $A$ et $B$ est :

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = A_\mu B_\mu \tag{B.13}$$

Le carré de la longueur d'un vecteur est le produit scalaire du vecteur par lui-même. Deux vecteurs sont orthogonaux si $A_\mu B_\mu = 0$.

Pour les quadrivecteurs, en coordonnées arbitraires, le scalaire

$$A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \tag{B.14}$$

est la généralisation du produit scalaire (B.13).

Le carré de la *longueur généralisée* d'un quadrivecteur $A^\mu$ (ou $A_\mu$) est le scalaire

$$l^2 = A_\mu A^\mu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \tag{B.15}$$

et la condition d'hortogonalité de deux quadrivecteurs ($A_\mu$, $B_\mu$ ou $A^\mu$, $B^\mu$) est

$$A_\mu B^\mu = 0 \text{ ou } A^\mu B_\mu = 0 \tag{B.16}$$

### B.1.10 Densité tensorielle

Le déterminant $g$ des $g_{\mu\nu}$ est toujours $< 0$ ; considérons $\sqrt{-g}$ ; on démontre que :

$$\sqrt{-g}\,\mathrm{d}\omega = \text{ invariant } (\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_4 \mathrm{d}x_s) \tag{B.17}$$

En coordonnées galiléennes, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{44} = +1$, $g_{\mu\nu} = 0$ $(\mu \neq \nu)$ ; $\sqrt{-g} = 1$ et l'invariant $\sqrt{-g}\,\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}x \,.\, \mathrm{d}y \,.\, \mathrm{d}z \,.\, c\mathrm{d}t$ (élément d'hypervolume, voir note 7).

Soit $T^{\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots}$ un tenseur, on appelle *densité tensorielle* l'expression

$$\mathcal{T} = \sqrt{-g}\, T^{\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots} \tag{B.18}$$

On peut toujours choisir les coordonnées de façon qu'en tout point-évènement $\sqrt{-g} = 1$. Ce choix simplifie souvent les calculs.

### B.1.11 Symboles de Christoffel

Nous ferons usage des symboles

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \lambda \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta g_{\mu\lambda}}{\delta x_\nu} + \frac{\delta g_{\nu\lambda}}{\delta x_\mu} - \frac{\delta g_{\mu\nu}}{\delta x_\lambda}\right) \text{ (pas de sommation)} \tag{B.19}$$

$$\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \lambda \end{Bmatrix} = g^{\lambda\alpha} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{bmatrix} \text{ (sommation par rapport à l'indice muet } \alpha). \tag{B.20}$$

Les grandeurs représentées par les symboles sont nulles en coordonnées galiléennes (les $g_{\mu\nu}$ sont constant). Ces symboles sont symétriques en $\mu$ et $\nu$. Il faut noter que ce ne sont pas des tenseurs.

### B.1.12 Dérivée covariante

La dérivée d'un scalaire est un quadrivecteur covariant, mais la dérivée d'un quadrivecteur n'est pas un tenseur. Soit un quadrivecteur covariant $A_\mu$, on démontre que les quantités

$$A_{\mu\nu} = \frac{\delta A_\mu}{\delta x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \rho \end{matrix} \right\} A_\rho \tag{B.21}$$

constituent un tenseur covariant, appelé *dérivée covariante* de $A_\mu$.

De même

$$A^\mu_\nu = \frac{\delta A^\mu}{\delta x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \rho\nu \\ \mu \end{matrix} \right\} A^\rho \tag{B.22}$$

est la dérivée covariante du quadrivecteur $A^\mu$ contrevariant.

*Généralisation* : Soit un tenseur quelconque, $A^\rho_{\lambda\mu\nu}$ par exemple ; sa dérivée covariante est le tenseur :

$$A^\rho_{\lambda\mu\nu\sigma} = \frac{\delta}{\delta x_\sigma} A^\rho_{\lambda\mu\nu} - \left\{ \begin{matrix} \lambda\sigma \\ \epsilon \end{matrix} \right\} A^\rho_{\epsilon\mu\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\sigma \\ \epsilon \end{matrix} \right\} A^\rho_{\lambda\epsilon\nu} - \left\{ \begin{matrix} \nu\sigma \\ \epsilon \end{matrix} \right\} A^\rho_{\lambda\mu\epsilon} + \left\{ \begin{matrix} \epsilon\sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} A^\epsilon_{\lambda\mu\nu} \tag{B.23}$$

La dérivée covariante remplace, dans les équations tensorielles exigées par le principe de la relativité, la dérivée ordinaire qui en est la *forme dégénérée, en coordonnées galiléennes* (car en coordonnées galiléennes les symboles de Christoffel sont nuls).

Supposons qu'on déplace un vecteur suivant un certain contour. Dans un espace euclidien et en coordonnées galiléennes, la condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur reste de même longueur et parallèle à lui-même pendant le déplacement est $\dfrac{\delta A^\mu}{\delta x_\nu} = 0$ $\left(\text{ou } \dfrac{\delta A_\mu}{\delta x_\nu} = 0\right)$. Cette condition étant la forme dégénérée de l'équation tensorielle $A^\mu_\nu = 0$ ( ou $A_{\mu\nu} = 0$) nous dirons que l'annulation de la dérivée covariante d'un quadrivecteur en tout point d'un contour exprime un « déplacement sans variation absolue »(Eddington) ou un « déplacement parallèle »(Weyl) bien qu'il ne puisse, en général, être question de parallélisme au sens de la géométrie euclidienne.

### B.1.13 Quelques formules utiles

On démontre que

$$\mathrm{d}g^{\alpha\beta} = -g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}\, \mathrm{d}g_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}g_{\alpha\beta} = -g_{\mu\alpha}\, g_{\nu\beta}\, \mathrm{d}g^{\mu\nu} \tag{B.24}$$

$$A^{\alpha\beta}\, \mathrm{d}g_{\alpha\beta} = -A_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}g^{\alpha\beta} \tag{B.25}$$

$$\mathrm{d}(\log g) = -g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\,\mathrm{d}g_{\mu\nu} \tag{B.26}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \epsilon\sigma \\ \rho \end{array} \right\} = \frac{\delta \log \sqrt{-g}}{\delta x_\mu} \tag{B.27}$$

### B.1.14 Divergence

Dans la théorie vectorielle ordinaire, on appelle divergence le scalaire

$$\frac{\delta A_x}{\delta x} + \frac{\delta A_y}{\delta y} + \frac{\delta A_z}{\delta z} \quad \text{ou} \quad \frac{\delta A_\mu}{\delta x_\mu} \tag{B.28}$$

La généralisation est immédiate. Pour un quadrivecteur contrevariant, la divergence est le *dérivée covariante contractée* $A^\nu_\mu$ (scalaire).

Introduisant la densité tensorielle, et tenant compte de (B.27)

$$\mathcal{A}^\mu_\mu = \frac{\delta \mathcal{A}^\mu}{\delta x^\mu} \tag{B.29}$$

La divergence d'un tenseur du second ordre est, de même, la dérivée covariante contractée : c'est un quadrivecteur.

1. *Tenseur mixte*$A^\nu_\mu$ : La divergence est $A^\nu_{\mu\nu}$ ($\nu$ devient un indice muet)

$$A^\nu_{\mu\nu} = \frac{\delta A^\nu_\mu}{\delta x_\nu} + \left\{ \begin{array}{c} \epsilon\nu \\ \nu \end{array} \right\} A^\epsilon_\mu - \left\{ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \epsilon \end{array} \right\} A^\nu_\epsilon \tag{B.30}$$

ou

$$\mathcal{A}^\nu_{\mu\nu} = \frac{\delta A^\nu_\mu}{\delta x^\nu} - \left\{ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \epsilon \end{array} \right\} \mathcal{A}^\nu_\epsilon \tag{B.31}$$

expression qui, lorsque $A_{\mu\nu}$ est symétrique, se simplifie

$$\mathcal{A}^\nu_{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{A}^\nu_\mu}{\delta x_\nu} - \frac{1}{2}\frac{\delta g_{\sigma\rho}}{\delta x_\mu}\mathcal{A}_{\sigma\rho} = \frac{\delta \mathcal{A}^\nu_\mu}{\delta x_\nu} + \frac{1}{2}\frac{\delta g^{\sigma\rho}}{\delta x_\mu}\mathcal{A}_{\sigma\rho} \tag{B.32}$$

2. *Tenseur contrevariant* $A^{\mu\nu}$ : la divergence est $A^{\mu\nu}_\nu$ ; en introduisant les densités tensorielles, on trouve

$$\mathcal{A}^{\mu\nu}_\nu = \frac{\delta \mathcal{A}_{\mu\nu}}{\delta x_\nu} + \left\{ \begin{array}{c} \epsilon\nu \\ \mu \end{array} \right\} \mathcal{A}^\nu_\epsilon \tag{B.33}$$

le dernier terme disparaît lorsque le tenseur est symétrique gauche.

*Dans la théorie vectorielle, l'annulation de la divergence d'un vecteur esprime la continuité du flus de ce vecteur. Dans la théorie de l'univers quadridimensionnel, où intervient une coordonnées de temps, l'annulation d'une divergence est la condition la plus générale de conservation ou de permanence d'un quadrivecteur ou d'un tenseur.*

### B.1.15 Le tenseur de Riemann - Christoffel

La dérivée covariante du tenseur $g_{\mu\nu}$ est identiquement nulle. On peut cepandant former un tenseur par différenciation à partir du tenseur fondamental seul.

Formons la dérivée seconde covariante $A_{\mu\nu\sigma}$ d'un vecteur arbitraire $A_\mu$, puis le tenseur $A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu}$, le calcul donne

$$A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu} = R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}\, A_\rho$$

$$R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = \left\{ \begin{array}{c} \mu\sigma \\ \epsilon \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \epsilon\nu \\ \rho \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \epsilon \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \epsilon\sigma \\ \rho \end{array} \right\} + \frac{\delta}{\delta x_\nu} \left\{ \begin{array}{c} \mu\sigma \\ \rho \end{array} \right\} - \frac{\delta}{\delta x} \left\{ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \rho \end{array} \right\} \tag{B.34}$$

Puisque $A_\rho$ est arbitraire et que $A_{\mu\nu\sigma} - A_{\mu\sigma\nu}$ est un tenseur, la dernière des règles indiquées (n$^o$ 6) montre que $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ est un tenseur. *Il n'est constitué que par les $g_{\mu\nu}$ et leurs dérivées* ; c'est un tenseur d'Univers.

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\sigma} = R_{\mu\nu} = -\frac{\delta}{\delta x_\rho} \left\{ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \rho \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \mu\rho \\ \epsilon \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \nu\epsilon \\ \rho \end{array} \right\} + \frac{\delta}{\delta x_\nu} \left\{ \begin{array}{c} \mu\rho \\ \rho \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \epsilon \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \epsilon\rho \\ \rho \end{array} \right\} \tag{B.35}$$

($\rho$ et $\epsilon$ sont des indices muets) qu'on peut écrire, en utilisant (B.27)

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\delta}{\delta x_\rho} \left\{ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \rho \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \mu\rho \\ \epsilon \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \nu\epsilon \\ \rho \end{array} \right\} + \frac{\delta^2 \log \sqrt{-g}}{\delta x_\mu\, \delta x_\nu} - \left\{ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \epsilon \end{array} \right\} \frac{\delta \log \sqrt{-g}}{\delta x_\epsilon} \tag{B.36}$$

Les deux derniers termes disparaissent si l'on choisit les coordonnées de manière que $\sqrt{-g} = 1$.

Enfin, en multipliant par $g^{\mu\nu}$ on forme l'invariant contracté

$$R = g^{\mu\nu}\, R_{\mu\nu} \tag{B.37}$$

qu'on démontre être une généralisation de la courbure de Gauss.

## B.2 Note 12 Gravitation et Dynamique

### B.2.1 Loi de la gravitation dans le vide

Si l'Univers est euclidien, et si l'on prend des coordonnées galiléennes, toutes les composantes de $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}$ s'annulent car tous Ies symboles de Christoffel sont nuls. Mais alors ces composantes s'annulent aussi dans tout autre système de coordonnées (propriété fondamentale des tenseurs, les équations de transformation des composantes etant lineaires et homogènes). L'annulation du tenseur de Riemann-Christoffel est donc une condition necessaire pour que l'Univers soit euclidien. On démontre que cette condition est suffsante.

Si l'on admet que l'Univers est euclidien à distance infinie de toute matière, la loi de gravitation dans le vide est nécessairement $R_{\mu\nu} = 0$ (voir chap. 10).

Mais si l'Univers est courbe dans son ensemble et si l'espace est fini, il n'est plus nécessaire de conserver $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0$ comme solution limite, et la covariance est respectée si l'on pose

$$R'_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \lambda\, g_{\mu\nu} = 0 \tag{B.38}$$

$\lambda$ étant une constante universelle certainement très petite. Pour le moment, nous supposerons $\lambda = 0$.

$R'_{\mu\nu}$ est la seule expression générale d'un tenseur du second ordre, fonction seulement des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées, ne contenant pas de dérivées d'ordre $> 2$ et linéaire par rapport aux dérivées secondes.

### B.2.2 Théorème fondamental

*La divergence du tenseur*

$$R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\, g^{\nu}_{\mu}\, R$$

*est identiquement nulle*, ce qu'on peut écrire

$$R^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\frac{\delta R}{\delta x_{\mu}} \tag{B.39}$$

Ces quatre entités ($\mu = 1,\, 2,\, 3,\, 4$) sont celles qui réduisent à 6 le nombre des conditions exprimant la loi de gravitation dans le vide ( ch. 10, p 91).

### B.2.3 Equations des géodésiques

Soit $A^{\sigma}$ le vecteur contrevariant $\dfrac{\mathrm{d}x_{\sigma}}{\mathrm{d}s}$. Sa dérivée covariante est

$$A^{\sigma}_{\alpha} = \frac{\delta}{\delta x_{\alpha}}\left(\frac{\mathrm{d}x_{\sigma}}{\mathrm{d}s}\right) + \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{\mathrm{d}x_{\beta}}{\mathrm{d}s} \tag{B.40}$$

Multiplions par $A^\alpha = \dfrac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}s}$ nous obtenons

$$A^\alpha\, A^\sigma_\alpha = \frac{\mathrm{d}^2 x_\sigma}{\mathrm{d}s^2} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha\beta \\ \sigma \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}s} \tag{B.41}$$

Le premier membre étant un tenseur, il en est de même du second. Ce tenseur s'annule en coordonnées galiléennes pour tous les points d'un géodésique car alors $\dfrac{\mathrm{d}^2 x^\sigma}{\mathrm{d}s^2} = 0$ et $\left\{ \begin{array}{c} \alpha\beta \\ \sigma \end{array} \right\} = 0$ ; par suite l'annulation de ce tenseur représente les équations d'une géodésique dans un Univers euclidien quelles que soient les coordonnées.

D'après le principe d'équivalence, il en est de même dans un champ de gravitation permanent. L'équation générale est donc

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_\sigma}{\mathrm{d}s^2} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha\beta \\ \sigma \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}s} = 0 \quad (\text{ 4 équations} : \sigma = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{B.42}$$

Il est à remarquer que le principe d'équivalence n'est autre chose que l'affirmattion de l'existence d'un Univers tangent. Il résulte de là qu'il y a nécessairement equivaIence entre un champ de force géométrique dans un Univers euclidien et un champ de gravitation permanent pour les Iois qui ne font intervenir que les $g_{\mu\nu}$ et heurs dérivées premières, mais qu il n'y a plus nécessairement equivalence pour les lois faisant intervenir les dérivées des $g_{\mu\nu}$ d'un ordre supérieur au premier.

### B.2.4 Loi de la gravitation dans la matière

Les équations $R_{\mu\nu} = 0$ qui expriment la loi dans le vide, remplacent l'équation de Laplace

$$\Delta\Omega = 0 \ \left(\Delta = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}\right) \ \Omega \text{ potentiel newtonien.}$$

Il s'agit maintenan de trouver l'équation qui doit remplacer l'équation de Poisson

$$\Delta\Omega = 4\pi G\rho \quad (\ \rho \text{ densité, } G \text{ const. de la gravit. newt.}).$$

La densité est l'énergie par unité de volume divisée par $c^2$. Or l'impulsion-énergie trouve sont expression la plus générale dans un tenseur qui précisément se réduit à $\rho$ dans le cas de la matière au repos, en coordonnées galiléennes. C'est ce tenseur qui doit remplacer $\rho$.

**Le tenseur impulsion-énergie**

Les trois tenseurs d'impulsion-énergie associés ont pour expression

$$T^{\mu\,\nu} = \rho_0 \,\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s} \quad (\rho_0 \text{ densité au repos ou densité propre}) \tag{B.43}$$

$$T_\mu^\nu = g_{\mu\sigma}\,T^{\sigma\nu} = g_{\mu\sigma}\,\rho_0\,\frac{\mathrm{d}x_\sigma}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s} \tag{B.44}$$

$$T_{\mu\,\nu} = g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\tau}\,T^{\sigma\tau} = g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\tau}\,\rho_0\,\frac{\mathrm{d}x_\sigma}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x_\tau}{\mathrm{d}s} \tag{B.45}$$

$T^{\mu\,\nu}$ et $T_{\mu\,\nu}$ sont symétriques. *En coordonnées galiléennes* $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ = ct, les composantes de $T_\mu^\nu$ sont les suivantes :

$$T_\mu^\nu = \begin{matrix} -\frac{1}{c^2}\,\rho v_{x_1}^2 & -\frac{1}{c^2}\,\rho v_{x_1} v_{x_2} & -\frac{1}{c^2}\,\rho v_{x_1} v_{x_3} & -\frac{1}{c^2}\,\rho v_{x_1} \\ -\frac{1}{c^2}\,\rho v_{x_2} v_{x_3} & -\frac{1}{c^2}\,\rho v_{x_2}^2 & -\frac{1}{c^2}\,\rho v_{x_2} v_{x_3} & -\frac{1}{c^2}\,\rho v_{x_2} \\ -\frac{1}{c^2}\,\rho v_{x_2} v_{x_1} & -\frac{1}{c^2}\,\rho v_{x_3} v_{x_2} & -\frac{1}{c^2}\,\rho v_{x_3}^2 & -\frac{1}{c^2}\,\rho v_{x_3} \\ -\frac{1}{c}\,\rho v_{x_1} & -\frac{1}{c}\,\rho v_{x_2} & -\frac{1}{c}\,\rho v_{x_3} & \rho \end{matrix} \tag{B.46}$$

$v_{x1}$, $v_{x2}$, $v_{x3}$ sont les composantes de la vitesse $v$ de la matière au point $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\rho$ est la densité égale à $\frac{1}{\alpha^2}\,\rho_0$ $\left(\alpha = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$

**La loi de conservation de l'impulsion-énergie**

En coordonnées galiléennes l'expression de la loi de concervation s'écrit

$$\frac{\delta\,T_\mu^\nu}{\delta\,x_\nu} = 0 \qquad (\nu \text{ indice muet}). \tag{B.47}$$

*Ces quatre équations (μ = 1, 2, 3, 4) ne sont autres que les équations bien connues de l'hydrodynamique en l'absence d'un champ de force et dans les milieux dépourvus de frottement.*

Nous remarquons que l'équation (B.47) est la *forme dégénérée* de l'équation tensorielle

$$T_{\mu\nu}^\nu = 0 \tag{B.48}$$

Cette équation tensorielle est donc l'expression générale de la loi, dans un Univers non euclidien. Nous avons d'ailleur déjà dit que l'annulation de la divergence exprime la conservation.

**La loi d'Einstein**

Du fait que les tenseurs $T_\mu^\nu$ et $R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\, g_\mu^\nu\, R$ ont tous deux une divergence nulle, il ne résulte pas forcément que ces tenseurs soient égaux (à un facteur constant près). Cependant, si, avec M. Eddington, nous posons en principe que tout tenseur *physique* est l'aspect sous lequel nous apparaît un tenseur *géométrique* d'Univers, et si nous considérons la loi de concervation de l'impulsion-énergie comme une loi expérimentalement établie et rigoureuse, $T_\mu^\nu$ doit être identifié avec un tenseur conservatif ; comme le plus simple des tenseurs conservatifs est $R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\, g_\mu^\nu\, R$, nous sommes conduits à écrire

$$\boxed{R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\, g_\mu^\nu\, R = -\chi\, T_\mu^\nu} \quad \chi \text{ constante universelle} \tag{B.49}$$

quitte à vérifier ensuite par l'expérience les conséquences de cette loi.

C'est la loi d'Einstein, mais Einstein a suivi pour l'établir une marche différente. Il a mis $R_{\mu\nu} = 0$ sous la forme des équations classique de Lagrange, a reconnu que certaines quantités $t_\mu^\nu$ (au nombre de seize, mais en ne formant pas un tenseur) représente une forme d'énergie, l'énergie de gravitation, et a ajouté simplement le tenseur impulsion-énergie $T_\mu^\nu$ à l'énergie de gravitation (il a remplacé $t_\mu^\nu$ par $t_\mu^\nu + T_\mu^\nu$). Il a ainsi obtenu la loi précédente. Cette loi impose la concervation de l'impulsion-énergie car, la divergence du premier membre étant identiquement nulle, la divergence du second membre est nulle.

Cette loi se déduit aussi du proncipe d'action stationnaire (méthode de MM. Hilbert et Lorenz).

La loi de gravitation peut encore se mettre sous d'autres formes

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R = -\chi\, T_{\mu\nu} \tag{B.50}$$

Multiplions par $g^{\mu\nu}$ ; remarquant que $g_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu} = 4$ (B.10), nous obtenons

$$R = \chi\, T = \chi\rho_0 \qquad (T = g^{\mu\nu}\, T_{\mu\nu}) \tag{B.51}$$

car on voit très facilement d'après (B.46), que

$$T = g^{\mu\nu}\, T_{\mu\nu} = T_\mu^\mu = T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 + T_4^4 = \alpha^2\, \rho = \rho_0 \tag{B.52}$$

valeur indépendante du système de coordonnées, puisque c'est un scalaire.

Remplaçant, dans (B.50), $R$ par $\chi T$, la loi s'écrit

$$\boxed{R_{\mu\nu} = -\chi\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, T\right)} \tag{B.53}$$

### B.2.5 Les équations de l'hydrodynamique

En mécanique *classique*, les quatre équations de l'hydrodynamique *dans un champ de force* peuvent se mettre sous la forme suivante, où $\rho F_{x_1} \ldots$ sont les composantes de la force s'exerçant sur l'unité de volume.

$$\frac{\delta\, T_\mu^\nu}{\delta\, x_\nu} = -\left(\frac{\rho}{c^2}\, F_{x_1},\ \frac{\rho}{c^2}\, F_{x_2},\ \frac{\rho}{c^2}\, F_{x_3},\ 0\right) \tag{B.54}$$

en coordonnées galiléennes. En réalité il n'y a plus de telles coordonnées, mais c'est un fait dont on ne tient pas compte.

Les équations rigoureuses sont les équations $T_{\mu\nu}^\nu = 0$, qui s'écrivent d'après (B.31)

$$\frac{\delta \mathcal{T}_\mu^\nu}{\delta x_\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \epsilon \end{array} \right\} \mathcal{T}_\epsilon^\nu \qquad \mathcal{T}_\mu^\nu = T_\mu^\nu \sqrt{-g} \ \ \text{(densité tensorielle)} \tag{B.55}$$

Ce sont les quatre conditions ($\mu$ =1 , 2, 3, 4) auxquelles la matière doit satisfaire ; elles déterminent l'impulsion et l'énergie communiquées à la matière par le champ de force.

Pour les comparer aux equations anciennes, comme en pratique l'Univers est presque euclidien et que les vitesses sont faibles, nous pouvons prendre des coordonnées très voisine des coordonnées galiéennes, les choisir de manière que $\sqrt{-g} = 1$ et admettre que $T_\mu^\nu$ se réduit à $T_4^4$ : nous obtenons l'approximation faite en mécanique ordinaire

$$\frac{\delta \mathcal{T}_\mu^\nu}{\delta x_\nu} = \left\{ \begin{array}{c} \mu 4 \\ 4 \end{array} \right\} T_4^4 = \left\{ \begin{array}{c} \mu 4 \\ 4 \end{array} \right\} \rho \tag{B.56}$$

*Les forces.* - Comparant (B.56) et (B.54) nous voyons que les trois symboles $\left\{ \begin{array}{c} 14 \\ 4 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 24 \\ 4 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} 34 \\ 4 \end{array} \right\}$ multipliés par $-c^2$ sont les composantes de la force *principale, la force d'inertie de la mécanique* qui produit une action proportionnelle à l'énergie (masse) ; la mécanique newtonienne néglige en général les autres « forces » $\left\{ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \epsilon \end{array} \right\}$ qui sont liées aux autres composantes du Tenseur $T_\mu^\nu$ c'est-à-dire aux quantités de mouvement et aux tensions internes.

Nous pouvons aussi écrire $T_{\mu\nu}^\nu$ sous la forme (B.32), et faire $\sqrt{-g} = 1$ nous obtenons en première approximation

$$\frac{\delta T_\mu^\nu}{\delta x_\nu} = -\frac{1}{2}\rho \frac{\delta g_{44}}{\delta x_\mu} \tag{B.57}$$

De sorte que

$$F_{x_1},\ F_{x_2},\ F_{x_3} = -\frac{c^2}{2}\left(\frac{\delta g_{44}}{\delta x_1},\ \frac{\delta g_{44}}{\delta x_2},\ \frac{\delta g_{44}}{\delta x_3},\right)$$

Si $\Omega$ est le potentiel au sens de la mécanique classique, on a

$$\Omega = \frac{c^2}{2} g_{44} + \text{ c}^{\text{te}}$$

et si, à l'infini $\Omega = 0$ et $g_{44} = 1$ (valeur galiléenne)

$$g_{44} = 1 + \frac{2\Omega}{c^2} \tag{B.58}$$

### B.2.6 La loi du mouvement du point matériel libre est contenue dans la loi de la gravitation

Si l'on adopte des coordonnées devenant galiléennes à l'infini, on trouve aisément que les équations des géodésiques se réduisent en première approximation aux équations du mouvement de la vieille mécanique, et l'on obtient en même temps (B.58) relation que nous venons de déduire de la loi de conservation, c'est-à-dire de Ia loi de la gravitation qui implique la conservation du tenseur $T_\mu^\nu$.

Ce resultat laisse penser qu il n'y a pas indépendance entre la loi de la gravitation et la loi suivant laquelle un mobile libre a pour ligne d'univers une géodésique. On peut le voir de différentes manières : voici une démonstration due à M. Jacques Rossignol.

Prenons des coordonnées telles que $\sqrt{-g} = 1$ , on a

$$T_{\mu\nu}^\nu = \frac{\delta T_\mu^\nu}{\delta x_\nu} - \frac{1}{2}\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta x_\mu} T^{\alpha\beta} = 0$$

explicitant $T_\mu^\nu$ et $T^{\alpha\beta}$, on obtient

$$\frac{\delta}{\delta x_\nu}\left(\frac{\mathrm{d}x_\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\nu}{\mathrm{d}s}\right) + \left\{ \begin{array}{c} \alpha\beta \\ \sigma \end{array} \right\} \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}s} = 0$$

Développant le premier terme, posant $u^\sigma = \frac{\mathrm{d}x_\sigma}{\mathrm{d}s}$, et en multipliant par $u_\sigma$ on trouve

$$\frac{\delta u^\nu}{\mathrm{d}x_\nu} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \rho_0 \frac{\delta u^\nu}{\delta x_\nu} = 0$$

qui $1^o$ exprime la conservation de la masse ; $2^o$ réduit l'expression précédente à l'équation des géodésiques. Levant la restriction $\sqrt{-g} = 1$ $\frac{\delta u^\nu}{\delta x_\nu} = 0$ devient $\frac{\delta}{\delta x_\nu}\left(u^\nu \sqrt{-g}\right) = 0$, et l'équation des géodésiques ne change pas, car le $1^{er}$ membre de cette équation est un tenseur.

On voit, par les résultats qui précèdent, que *la loi d'Einstein contient toute la dynamique*.

### B.2.7 La loi de Newton

Prenant *dans un champ statique* des coordonnées très voisines de coordonnées galiléennes et devanant galiléennes à l'infini, négligeant toutes les quantités très petites, réduisant $T_{\mu\nu}$ à $T_{4\nu} = \rho$, confondant $T_{44} = \rho$ et $T = \rho_0$, tenant compte enfin de (B.58), on touve que la formule (B.53) se réduit en première approximation à l'équation de Poisson

$$\Delta\Omega = 4\pi\rho G$$

avec la relation

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^2} = 1,87\,10^{-27} \quad \text{unité C.G.S.} \tag{B.59}$$

### B.2.8 Propagation de la gravitation

Dans un champ non statique, au lieu de l'équation de Poisson, on obtient (après calculs compliqués)

$$\left(-\frac{\delta^2}{\delta x_1^2} - \frac{\delta^2}{\delta x_2^2} - \frac{\delta^2}{\delta x_3^2} + \frac{\delta^2}{\delta x_4^2}\right) h_{\mu\nu} = 2R_{\mu\nu} \tag{B.60}$$

Les $h_{\mu\nu}$ étant les différences, supposées très petites, entre les valeurs des $g_{\mu\nu}$ et les valeurs des constantes galiléennes. Da,s le vide $R_{\mu\nu} = 0$ et l'équation (B.60) exprime que les perturbations gravifiques se propagent avec la vitesse de la lumière (car $x_4 = ct$).

## B.3 Note 13 Le champ de gravitation d'un centre matériel

### B.3.1 Expression de $\mathrm{d}s^2$

Dans un Univers euclidien, si l'on prend des coordonnées polaires

$$x_1 = r,\ x_2 = \theta,\ x_3 = \varphi,\ x_4 = ct.$$

l'intervalle élémentaire est

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}r^2 - \underbrace{\left(r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right)}_{\text{élément d'arc de sphère}} + c^2\mathrm{d}t^2$$

Dans le champ de gravitation qui règne autour d'un centre matériel, il n'y a plus de coordonnées euclidiennes, mais on peut, prenant la particule pour origine des coordonnées, essayer de mettre $\mathrm{d}s^2$ sous une forme analogue,quitte à chercher ensuite la signification des coordonnées. Nous voyons d'abord que pour que le resultat ait une signification *physique*, il faudra choisir des coordonnées telles que Ies notions d'espace et de temps soient conservées ; il résulte de là qu'il ne faut pas introduire de termes en $\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, etc...$\mathrm{d}r\mathrm{d}t$, etc..., à cause de la symétrie « dans l'espace » de la particule et de son champ, et de la symétrie « dans le temps » de son histoire passée et future, suivant l'expression de M. Eddington. Posons donc :

$$\mathrm{d}s^2 = -e^{\lambda}\mathrm{d}r^2 - \left(r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) + e^{\nu}\mathrm{d}x_4^2\mathrm{d}x = c\,\mathrm{d}t$$

On réussit effectivement à déterminer $\lambda$ et $\nu$ (qui sont fonction de $r$ et non de $\theta$, $\varphi$, $t$ et doivent s'annuler à l'infini) de manière que la loi d'Einstein $R_{\sigma\tau} = 0$ soit satisfaite.

On a

$$g_{11} = -e^{\lambda},\ g_{22} = -r^2,\ g_{33} = -r^2\ \sin^2\theta,\ g_{44} = e^{\nu}$$
$$g = -e^{\lambda+\nu}\,r^4\ \sin^2\theta$$

Il faut écrire les équations $R_{\sigma\tau} = 0$ (qui se réduisent ici à $R_{11} = 0$, $R_{22} = 0$, $R_{33} = 0$, $R_{44} = 0$) en explicitant tous les symboles de Christoffel. On arrive, après des calculs assez pénibles, au résultat suivant (résultat rigoureux) [1], établis par M. Schwarzschild.

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{1}{\gamma}\mathrm{d}r^2 - r^2\,\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 + \gamma c^2\,\mathrm{d}t^2 \tag{B.61}$$

avec $\gamma = 1 - \dfrac{2GM}{c^2\,r}$ ($G$ constante de gravitation newtonnienne). $M$ est une constante d'intégration qu'on identifie avec la masse de la particule, car d'après (B.58)

$$\Omega = -\frac{GM}{r}$$

1. L'objection faite récemment par M. PainIevé (C. R. de l'Ac. des Sc.) contre les conclusions qu'on peut deduire de la formule d'Einstein-Schwarzschild n'est pas justifiee. M. Painlevé a employé d'autres coordonnées et a, naturellement, trouvé une autre expression exacte de $\mathrm{d}s^2$. Mais si le *mathématicien* considère à son point de vue toutes les coordonnees comme équivalentes, il n'en est pas de même du *physicien* lorsque celui-ci a besoin d'interpréter les résultats, car Ie choix des coordonnées peut alors se trouvé imposé par la nature des grandeurs qui interviennent dans les mesures expérimentales. Or le resultat de M. Painlevé ne saurait etre interprété physiquement parce que sa formule contient un terme en $\mathrm{d}r\mathrm{d}t$ incompatible avec la symetrie dans le temps, et que par suite les coordonnées employées n'ont plus de sens au point de vue de ce que nous appelons « distance » et « temps ». Les conclusions *physiques* de M. Painlevé sont, pour cette raison complètement inexactes.

Cherchons maintenant la signification des coordonnées :

**Le temps**

En un point fixe par rapport au centre matériel ($\mathrm{d}r = 0$ ; $\mathrm{d}\theta = 0$, $\mathrm{d}\varphi = 0$) l'intervalle de temps mesuré entre deux évènements infiniment rapprochés est

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}s}{c} = \sqrt{\gamma}\mathrm{d}t \tag{B.62}$$

Comme $\sqrt{\gamma} = 1$ pour $r = \infty$, on voit que *la coordonnée $t$ est le temps à distance infinie de la particule*, dans un système lié à la particule.

**L'espace**

Le terme d'espace représentant le carré de la distance de deux points infiniments voisins est

$$\mathrm{d}l^2 = \frac{1}{\gamma}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2 \tag{B.63}$$

L'espace n'est pas euclidien, cependant il s'en faut de peu car $\gamma$ est très voisin de 1 . Transversalement ($\mathrm{d}r = 0$)l'expression de $\mathrm{d}l^2$ est la même que celle d'un arc de sphère en géométrie euclidienne ($r$ rayon vecteur, $\theta$ angIe de ce rayon avec un axe fixe, $\varphi$ angle azimuthal). Radialement ($\mathrm{d}\theta = 0$, $\mathrm{d}\varphi = 0$) on a $\mathrm{d}r = \sqrt{\gamma}\mathrm{d}l$. On voit que les longueurs mesurees transversalement (une circonférence, par exemple, ayant pour centre la particule) sont les mêmes que si l'espace était euclidien, mais qu'il en est autrement pour les longueurs mesurées radialement (le diamètre de la circonférence), les mesures étant faites dans les deux cas avec la même règle très courte $\mathrm{d}l$. II résulte de là que le rapport de la circonférence au diamètre est légèrement inférieur à $\pi$ mais l'écart est faible : si une masse de 1 tonne était à l'intérieur d'un cercle de 5 mètres de rayon, c'est seulement la 24e décimale qui serait changée (M. Eddington).

Pratiquement, $r$ et $t$ sont « la distance » et « le temps ».

## B.3.2 Mouvement de planètes

Supposant la vitesse initiale dans le plan $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ c'est-à-dire posant initialement $\cos\theta = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = 0$, il suffit de transporter, dans l'équation générale des géodésiques, les valeurs des symboles de Christoffel trouvés dans le calcul de $\mathrm{d}s^2$, pour obtenir *a)* $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2} = 0$, qui prouve que la trajectoire reste dans le plan $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

*b)* Les équations du mouvement suivantes ;

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 + r^2\left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right) = (K^2-1) + \dfrac{2GM}{c^2 r} + \dfrac{2GM}{c^2}\dfrac{h^2}{r^3} \\ r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = h \quad (K,\, h \text{ constantes d'intégration}) \end{cases} \tag{B.64}$$

au lieu des équations newtonniennes

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 + r^2\left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right) = -\dfrac{GM}{a} + \dfrac{2GM}{r} \\ r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = h_0 \quad (a \text{ demi grand axe de l'orbite}) \end{cases} \tag{B.65}$$

à part le terme supplémentaire $\dfrac{2GM}{c^2}\dfrac{h^2}{r^3}$, on peut identifier (B.64) et (B.65) en posant $K^2 = 1 - \dfrac{2GM}{a}$.

Le terme supplémentaire entraîne un *deplacement du périhélie.*

On trouve pour ce deplacement, en fraction de tour par période,

$$\frac{3GM}{c^2 a(1-e^2)} \qquad (e \text{ exentricité}) \tag{B.66}$$

### B.3.3 Propagation de la lumière

Faisant $\mathrm{d}s = 0$, on obtient pour le mouvement dans le plan $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(r\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \gamma c^2 \tag{B.67}$$

$$\textit{propagation radiale} \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \gamma c \tag{B.68}$$

$$\textit{propagation transversale} \quad r\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\gamma}c \tag{B.69}$$

Pour un rayon venant de l'infini et parvenu à l'infini après être passé à la distance minimum $R$ du centre, on trouve pour la déviation (angle des asymptotes de la trajectoire) $\dfrac{4GM}{c^2\,R}$.

### B.3.4 Ralentissement du temps

Soient deux évènements infiniment voisins se produisant au même point du champ de gravitation ($\mathrm{d}r = 0$ ; $\mathrm{d}\theta = 0$, $\mathrm{d}\varphi = 0$), (B.61) se réduit à

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\gamma}\,\mathrm{d}t \tag{B.70}$$

$\mathrm{d}t$ est l'intervalle de temps mesuré, entre les deux événements considérés, par un observateur lié au centre matériel mais situé très loin, pratiquement en dehors du champ. D'autre part l'intervalle de lemps propre entre les deux événements est $\int \mathrm{d}\tau$ qui est $< \int \mathrm{d}t$. Considérons deux horloges identiques A et B placées d'abord à côté l'une de l'autre très loin du centre et marquant la même heure, toutes deux mesurent $t$. Transportons l'horloge A à la distance $r$ du centre ; elle va mesurer $\mathrm{d}\tau < \mathrm{d}t$ ; elle va donc marcher plus lentement et si on la ramène près de l'horloge B, elle aura pris du retard sur cette dernière.

*Déplacement des raies spectrales* : soit $\delta s$ l'intervalle, indépendant du champ de gravitation, entre deux phases égales de l'émission. L'observateur terrestre, qui est en un point où le champ est négligeable, mesure

$$\delta t = \frac{\delta s}{c\sqrt{\gamma}} = \frac{\delta\tau}{\sqrt{\gamma}} \tag{B.71}$$

si la source est sur le soleil. Mais si la même source est sur la terre, il mesure $\delta\tau$. Or $\delta t > \delta\tau$ donc les raies du spectre solaire (et des spectres stellaires) doivent être légèrement déplacées vers le rouge.

## B.4 Note 14
## Les lois générales de l'électromagnétisme

### B.4.1 Généralisation des équations de Maxwell

Dans la théorie ordinaire (Univers euclidien et coordonnées galiléennes) on a les équations de Maxwell-Lorentz (note 10). Nous allons chercher la forme *tensorielle* générale dont elles sont une forme dégénérée.

Soient $G_1$, $G_2$, $G_3$ les composantes du *polentiel vecteur* (unités électromagnétiques) et $\psi$ Ie *polentiel scalaire* (unités électrostatiques) de la théorie habituelle. En vue de la généralisation, posons

$$\begin{cases} x_1 = x & x_2 = y & x_3 = z & x_4 = ct \\ \varphi_1 = -G_1 & \varphi_2 = -G_2 & \varphi_3 = -G_3 & \varphi_4 = \psi \end{cases} \tag{B.72}$$

On a avec cette notation (formules connues)

$$X = \frac{\delta\varphi_1}{\delta x_4} - \frac{\delta\varphi_4}{\delta x_1} \quad L = \frac{\delta\varphi_2}{\delta x_3} - \frac{\delta\varphi_3}{\delta x_2} \quad \text{etc.}\ldots \tag{B.73}$$

Ecrivons maintenant les équations de Maxwell-Lorentz (note 10) en désignant par $u$, $v$, $w$ les composantes de la densité de courant (unités électromagnetiques) et $P$ la densité de charge (unités électrostatiques), (l'unité de charge étant choisie de façon que le facteur $4\pi$ disparaisse). Nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\delta L}{\delta x_4} + \dfrac{\delta Z}{\delta x_2} - \dfrac{\delta Y}{\delta x_3} = 0 \\ \dfrac{\delta M}{\delta x_4} + \dfrac{\delta X}{\delta x_3} - \dfrac{\delta Z}{\delta x_1} = 0 \\ \dfrac{\delta N}{\delta x_4} + \dfrac{\delta Y}{\delta x_1} - \dfrac{\delta X}{\delta x_2} = 0 \\ \dfrac{\delta L}{\delta x_1} + \dfrac{\delta M}{\delta x_2} + \dfrac{\delta N}{\delta x_3} = 0 \end{array}\right. \tag{B.74}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\delta X}{\delta x_4} + \dfrac{\delta N}{\delta x_2} - \dfrac{\delta M}{\delta x_3} = u \\ -\dfrac{\delta Y}{\delta x_4} + \dfrac{\delta L}{\delta x_3} - \dfrac{\delta N}{\delta x_1} = v \\ -\dfrac{\delta Z}{\delta x_4} + \dfrac{\delta M}{\delta x_1} - \dfrac{\delta L}{\delta x_2} = w \\ \dfrac{\delta X}{\delta x_1} + \dfrac{\delta Y}{\delta x_2} + \dfrac{\delta Z}{\delta x_3} = P \end{array}\right. \tag{B.75}$$

Soit maintenant un quadrivecteur covariant $\varphi_\mu$ (arbitraire pour le moment) nous pouvons former sa dérivée covariante $\varphi_{\mu\nu}$. La différence

$$\varphi_{\mu\nu} - \varphi_{\nu\mu} = \frac{\delta\varphi_\mu}{\delta x_\nu} - \frac{\delta\varphi_\nu}{\delta x_\mu} = F_{\mu\nu} \tag{B.76}$$

*est un tenseur symétrique gauche*, et d'après sa formation, nous avons les *identités* :

$$\frac{F_{\mu\nu}}{\delta x_\sigma} + \frac{F_{\nu\sigma}}{\delta x_\mu} + \frac{F_{\sigma\mu}}{\delta x_\nu} \equiv 0 \tag{B.77}$$

Puisque $F_{\mu\nu}$, étant symétrique gauche, n'a que 6 composantes distinctes, au signe près, posons :

$$\begin{array}{ll} F14 = -F41 = X & F23 = -F32 = L \\ F24 = -F42 = Y & F31 = -F13 = M \\ F34 = -F43 = Z & F12 = -F21 = N \end{array}$$

puis donnons à $\mu$, $\nu$, $\sigma$ les valeurs suivantes

$$\mu,\, \nu,\, \sigma = 2,\, 3,\, 4 \quad \mu,\, \nu,\, \sigma = 3,\, 4,\, 1$$
$$\mu,\, \nu,\, \sigma = 4,\, 1,\, 2 \quad \mu,\, \nu,\, \sigma = 1,\, 2,\, 3$$

les identités (B.77 se trouvent être précisément les formules (B.74). De plus, les composantes du champs électromagnétique sont formées à partir du potentiel scalaire (éq B.73) exactement comme les composantes de $F_{\mu\nu}$ sont formées à partir de $\varphi_\mu$ (B.76).

Nous pouvons donc interpréter le premier groupe de Maxwell : les composantes du champs électromagnétique constituent un tenseur symétrique gauche

$$\begin{array}{lc rrrr} F_{\mu\nu} & = & O & N & -M & X \\ \rightarrow \nu & & -N & O & L & Y \\ \downarrow & & M & -L & O & Z \\ \mu & & -X & -Y & -Z & O \end{array} \tag{B.78}$$

formé à partir d'un quadrivecteur potentiel $\varphi_\mu$ dont les composantes d'espace (changées de signe) sont les composantes du potentiel vecteur et dont la composante de temps est le potentiel scalaire de la théorie ordinaire.

On peut verifier, en transformant les composantes du tableau (B.78) suivant la Ioi de transformation des composantes d'un tenseur covariant, et en passant d'un système galiléen à un autre système galiléen, qu'on trouve bien les forces électrique et magnétique du second système telles qu'on les obtient en relativité restreinte. Les forces électrique et magnétique constituent donc bien un tenseur.

Le tenseur contrevariant associé $F^{\mu\nu}$ permet d'exprimer le second groupe de MaxwelI (B.75) ; ce groupe s'ecrit, en effet

$$\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\delta F^{12}}{\delta x_2} + \dfrac{\delta F^{13}}{\delta x_3} - \dfrac{\delta F^{14}}{\delta x_4} = u \\ -\dfrac{\delta F^{21}}{\delta x_1} + \dfrac{\delta F^{23}}{\delta x_3} - \dfrac{\delta F^{24}}{\delta x_4} = v \\ -\dfrac{\delta F^{31}}{\delta x_1} + \dfrac{\delta F^{32}}{\delta x_2} - \dfrac{\delta F^{34}}{\delta x_4} = w \\ \dfrac{\delta F^{41}}{\delta x_1} + \dfrac{\delta F^{42}}{\delta x_2} + \dfrac{\delta F^{43}}{\delta x_3} = P \end{array}\right. \tag{B.79}$$

$$\text{ou} \qquad \frac{\delta F^{\mu\nu}}{\delta \nu} = u,\, v,\, w,\, P$$

ce qui prouve que $u$, $v$, $w$, $P$ sont les composantes d'un quadrivecteur contrevariant $J^\mu$ car $\frac{\delta F^{\mu\nu}}{\delta \nu}$ est la forme dégénérée de la divergence $F^{\mu\nu}_{\nu}$ qui est un quadrivecteur contrevariant.

Le quadrivecteur $J^\mu$ est le *courant*. Ses composantes d'espace constituent le courant de convection et sa composante de temps est la densité de charge.

En résumé les équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{cases} F_{\mu\nu} = \dfrac{\delta\varphi_\mu}{\delta x_\nu} - \dfrac{\delta\varphi_\nu}{\delta x_\mu} \\ \dfrac{\delta F^{\mu\nu}}{\delta\nu} = J^\mu \end{cases} \tag{B.80}$$

La première équation est sous la forme requise par le principe de relativité ; la seconde est la forme dégénérée de $F^{\mu\nu}_\nu = J^\mu$. Les équations générales valables dans un Univers euclidien en coordonnées arbitraire, *valables aussi dans un Univers non euclidien* par application du principe d'équivalence, sont

$$\begin{cases} F_{\mu\nu} = \dfrac{\delta\varphi_\mu}{\delta x_\nu} - \dfrac{\delta\varphi_\nu}{\delta x_\mu} \\ F^{\mu\nu}_\nu = J^\mu \end{cases} \tag{B.81}$$

## B.4.2 Loi de la conservation de l'électricité

La dernière de ces équations s'écrit d'après (B.33), $F^{\mu\nu}$ étant symétrique gauche

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}_\nu = \frac{\delta\mathcal{F}^{\mu\nu}}{\delta x_\nu} = \mathcal{J}^\mu$$

d'où l'on tire

$$\frac{\delta\mathcal{J}^\mu}{\delta x_\mu} = \frac{\delta^2\mathcal{F}^{\mu\nu}}{\delta x_\mu\,\delta x_\nu} = 0$$

car $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ étant symétrique gauche, $\frac{\delta^2\mathcal{F}^{\mu\nu}}{\delta x_\mu\,\delta x_\nu} = 0$. On a donc $J^\mu_\mu = 0$ (d'après B.29).

En coordonnées galiléennes, cette équation devient

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} + \frac{1}{c}\frac{\delta P}{\delta t} = 0 \tag{B.82}$$

semblable à l'équation de continuité de l'hydrodynamique, elle exprime la conservation de l'électricité.

## B.4.3 Le tenseur d'énergie électromagnétique et la loi générale de concervation de l'impulsion-énergie

Par application et généralisation tensorielle des expressions qui donnent les composantes de la force mécanique s'exerçant sur l'unité de volume contenant charges et courants, ainsi que le travail accompli par le courant dans l'unité de temps, on démontre qu'il existe un tenseur d'énergie

$$E_\mu^\nu = \frac{1}{c^2}\left(-F_{\mu\alpha}F^{\nu\alpha} + \frac{1}{4}g_\mu^\nu F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{B.83}$$

dont la variation compense la variation du tenseur matériel

$$E_{\mu\nu}^\nu + T_{\mu\nu}^\nu = 0 \tag{B.84}$$

ce qui exprime la loi générale de conservation de l'impulsion-énergie. Dans l'expression de la loi de la gravitation, $E_\mu^\nu$ s'ajoute à $T_\mu^\nu$.

Mais l'énergie électromagnétique ne modifie pas la courbure *totale* $R$ car l'invariant contracté $E = E_\mu^\mu$ est nul. La courbure $R$ est toujours égale à $xT = \chi\rho_0$. c'est Ià un fait capital qui montre que la matière ne peut pas être formée uniquement à partir du tenseur $E_\mu^\nu$, ce tenseur ne contribuant pas à la constitution de la densité matérielle.

# B.5 Note 15<br>La courbure de l'espace et du temps

## B.5.1 La courbure non nulle dans le vide

C'est précisément Ie fait que l'énergie électromagnétique n'influe pas sur Ia courbure *totale* qui nécessite une modification de la Ioi de gravitation admise jusqu'ici.

Toutes les équations où intervient la densité de la matière sont des équations macroscopiques car la matière est supposée continue. Si nous voulons écrire les équations microscopiques, nous devons faire disparaître Ie tenseur matériel $T_\mu^\nu$ (qui correspond à l'aspect macroscopique de Ia matière) et ne conserver que le tenseur $E_\mu^\nu$ qui sera alors le tenseur exprimant l'énergie du champ des électrons. D'après la loi (B.49) la formule microscopique serait, en tout point

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\,g_\mu^\nu\,R = -\chi\,E_\mu^\nu \tag{B.85}$$

L'invariant contracté $E_\mu^\mu$ étant nul, celui du premier membre $R_\mu^\nu - \frac{1}{2}\,g_\mu^\nu\,R = -R$ devrait aussi être nul, en tout point ; alors, dans la matière, la valeur *moyenne* de $R$ serait nulle aussi, et comme cette valeur moyenne est égale à $\chi\rho_0$ il n'y aurait pas de matière ; résultat absurde.

Il faut donc remplacer (B.85) par une formule dans laquelle le scalaire du permier membre soit nul. On n'a pas le choix, il faut écrire

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{4}\, g_\mu^\nu\, R = -\chi\, E_\mu^\nu \tag{B.86}$$

cette équation exprime la loi de la gravitation, $E_\mu^\nu$ étant le tenseur d'énergie du champ électromagnétique des électrons.

Si l'on forme la divergence des deux membres de (B.86), on trouve la relation

$$\frac{1}{4}\frac{\delta R}{\delta x_\mu} = -\frac{\chi}{c^2}\, F_{\mu\alpha}\, J^\alpha \tag{B.87}$$

Partout où $J^\alpha = 0$ c'est-à-dire en dehors des lignes d'Univers des électrons, la courbure totale est constante ; *cette courbure est donc la même dans le vide et aux points où se trouve de l'énergie libre (énergie rayonnante). Mais la courbure dans le vide n'est pas nulle* car $R = 0$ dans Ie vide, où $E_\mu^\nu = 0$, entraînerait $R_\mu^\nu = 0$ (ou $R_{\mu\nu} = 0$) et par la suite la loi (B.49) seule compatible avec $R_\mu^\nu = 0$ dans le vide ; on retomberait sur la loi qu'il faut précisément modifier.

D'après (B.86) la loi dans le vide s'écrit

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\, g_{\mu\nu}\, R = 0$$

ou en appelant $R_0$ la courbure dans le vide et posant $R_0 = 4\lambda$

$$R'_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \lambda\, g_{\mu\nu} = 0 \tag{B.88}$$

avec $\lambda \neq 0$ mais très petit, loi déjà indiquée note 12.

La loi macroscopique de la matière considérée comme continue s'obtient immédiatement en remplaçant dans toute la théorie précédemment donnée $R_\mu^\nu$ par $R_\mu'^\nu$ et $R$ par $R' = R - 4\lambda = R - R_0$.

La divergence de $R_\mu'^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu\, R'$ est identiquement nulle, et ce tenseur doit être identifié avec $T_\mu^\nu$ pour satisfaire le loi de concervation. La loi de gravitation dans la matière devient

$$R'_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \lambda\, g_{\mu\nu} = -\chi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\, T \right) \tag{B.89}$$

et la densité (au repos) est $\dfrac{1}{\chi}\,(R - R_0)$ $\left(\text{au lieu de } \dfrac{1}{\chi} R\right)$.

### B.5.2 L'espace fermé

Cherchons maintenant quel peut être l'aspect ultra-macroscopique ou cosmique de l'Univers, en accord avec la loi (B.89). Prenant comme unité de volume un espace suffisamment grand (par ex. : 1000 parsecs-cubes), soit $\rho$ la densité moyenne de la matière, densité que nous supposerons constante. Nous pouvons, dans cet aspect d'ensemble, ne tenir compte que de la distribution générale de la matière, et faire abstraction des irrégularités locales.

Les vitesses relatives des astres étant toujours très petites par rapport à la vitesse de la lumière, nous pouvons envisager un système de référence dans lequel la matière est en moyenne, au repos. $T_{\mu\nu}$ se réduit sensiblement à

$$T_{44} = g_{44}\rho$$

Les équations (B.89) s'écrivent :

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} - \left(\lambda + \dfrac{1}{2}\chi\rho\right) g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{si l'on a pas } \mu = \nu = 4 \\ R_{44} - \left(\lambda + \dfrac{1}{2}\chi\rho\right) g_{44} = -\chi g_{44}\rho \end{cases} \tag{B.90}$$

Prenant la position de l'observateur comme origine des coordonnees et adoptant des coordonnêes sphériques, ces equations comportent deux solutions, dans chacune desquelles la coupe à temps constant est un espace à courbure constante positive.

### B.5.3 L'Univers d'Einstein

Soit $U$ le rayon de courbure. La solution d'Einstein est :

$$\mathrm{d}s^2 = -U^2\left[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\right] + c^2\,\mathrm{d}t^2 \tag{B.91}$$

avec

$$\chi\rho = 2\lambda \qquad \lambda = \frac{1}{U^2} \tag{B.92}$$

$t$ est un temps d'Univers absolu. L'espace et le temps sont séparés.

Le terme d'espace est

$$\mathrm{d}l^2 = -U^2\left[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\right]$$

extension, avec une dimension de plus (coordonnée $\varphi$) de l'élément de ligne sur la surface d'une sphère ordinaire (fig. B.1).

$$\mathrm{d}l^2 = -U^2\left[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\mathrm{d}\theta^2\right] \quad \theta \text{ angle azimuthal}$$

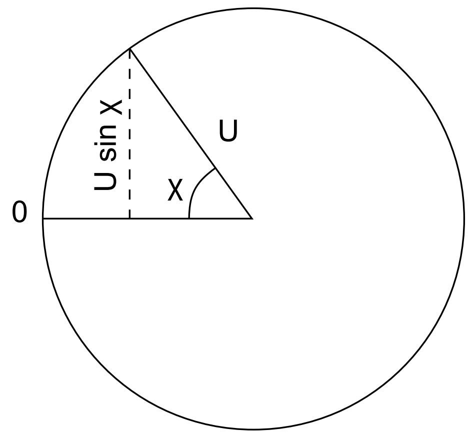


FIGURE B.1 –

L'espace à courbure constante positive a deux formes possibles, *l'espace sphérique de Riemann* et *l'espace elliptique de Newcomb*. Adoptant l'hypothèse de l'espace sphérique, dont le voIume total est $2\pi^2 U^3$, Ia masse $M$ totale de la matière mondiale serait $M = 2\pi^2 U^3\, \rho$, d'où l'on déduit, d'après (B.92)

$$U = \frac{\chi}{4\pi^2}\, M \tag{B.93}$$

Le rayon d'Univers serait déterminé par la quantité totale de matière. Comme ce rayon n'est sans doute pas inférieur à $10^{20}$ cm, ce résultat nécessite l'existence de quantités de matière considérablement supérieures à celles que nous connaissons

### B.5.4 L'Univers de De Sitter

La seconde solution de (B.90) est

$$\mathrm{d}s^2 = -U^2\left[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\right] + c^2\cos^2\chi\mathrm{d}t^2 \tag{B.94}$$

avec

$$\rho = 0 \qquad \lambda = \frac{3}{U^2} \tag{B.95}$$

Cet Univers est profondément différent de celui d'Einstein. $g_{44}$ étant égal à $\cos^2\chi$ (au lieu de la constante 1) l'espace et le temps restent unis, et il y a une courbure du temps.

De plus $\rho = 0$ montre que la courbure d'ensembIe de l'Univers n'est pas conditionnée par la matière mondiale (pas plus que le rayon de la terre ne dépend des accidents du sol). La matière intervient seulement pour produire des perturbations locales que nous négligeons ici, n'envisageant que la forme d'ensemble.

*La zone du temps stationnaire* - Pour un point fixe dans l'espace (par rapport à l'observateur dont la position est prise pour origine des coordonnées), on a

$$\mathrm{d}\chi = 0, \quad \mathrm{d}\theta = 0, \quad \mathrm{d}\varphi = 0$$

et

$$\mathrm{d}s = \cos\chi c\mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{\cos\chi} \tag{B.96}$$

Près de l'observateur $\chi = 0$ et $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau$ ; $t$ est le temps de l'observateur. Mais, loin de lui, l'élément de temps propre est $\mathrm{d}\tau = \dfrac{\mathrm{d}s}{c}$ alors que l'élément de temps de l'observateur est toujours $\mathrm{d}t$. Dans la zone $r = \dfrac{1}{2}\pi U \left(\chi = \dfrac{\pi}{2}\right)$ le temps est stationnaire *pour l'observateur* car $\mathrm{d}t$ est infiniment grand par rapport à $\mathrm{d}s$.

## B.6 Note 16 Généralisation de Weyl et d'Eddington

### B.6.1 Théorie de Weyl

Dans la théorie d'Einstein, l'électricité n'est pas rattachée à une propriété géométrique de la structure d'Univers, qui est entièrement représentée par les dix potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$.

M. H. Weyl a uni, dans une même géométrie, le champ de gravitation et le champ électromagnétique.

Le développement progressif de la théorie de la relativité a consisté dans la suppression des axiomes et des restrictions non nécessaires. Or, jusqu'à présent, il subsiste une hypothèsé arbitraire : nous avons admis qu'on peut toujours, en des points d'Univers différents, employer *la même unite* de mesure pour la comparaison des intervalles. A première vue cela paraît évident : en un point d'Univers A, nous définissons une unité de longueur en choisissant une règle étalon, et cette règle sert aussi pour la mesure optique du temps si nous prenons comme unité naturelle la vitesse de la lumière ; il semble donc qu'en transportant en un autre point B une copie exacte de l'étalon choisi en A, on puisse, en B mesurer Ies intervalles élémentaires et faire Ia comparaison avec les intervalles mesurés en A. Sans doute, nous pouvons opérer de la sorte si deux copies exactes de l'étalon transportées de A en B par des chemins différents sont toujours identiques en B. Or, rien ne prouve à priori, qu il en soit ainsi, et si la longueur n'est pas intégrable, nous ne pouvons pas obtenir sans ambiguïté en B une longueur que nous puissions considérer, par définition, comme représentant la même unité qu'en A.

L'intégrabilité de la longueur (généralisée : voir note 11) est la restriction qui subsiste et qu'il faut supprimer.

Le champ de gravitation correspond à la non-integrabilité de la direction. Soit en effet $A^\mu$ un quadrivecteur ; faisons-lui décrire un circuit fermé par « déplacement parallèle » (note 11) c'est-à-dire tel que la dérivée covariante $A^\mu_\nu$ soit constamment nulle.

$$\frac{\delta A^\mu}{\delta x_\nu} + \left\{ \begin{array}{c} \nu\alpha \\ \mu \end{array} \right\} A^\alpha = 0 \tag{B.97}$$

La variation de ce vecteur est

$$\delta A^\mu = \int \frac{\delta A^\mu}{\delta x_\nu} \mathrm{d}x^\nu = -\int \left\{ \begin{array}{c} \nu\alpha \\ \mu \end{array} \right\} A^\alpha \mathrm{d}x_\nu$$

Posons $\mathrm{d}S^{\nu\sigma} = -\mathrm{d}S^{\sigma\nu} = \mathrm{d}x_\nu \, \mathrm{d}x_\sigma$ ; $\mathrm{d}S$ est un tenseur symétrique gauche qui fait correspondre à l'aire élémentaire une direction positive de parcours sur le contour qui la limite. L'équation précédente s'écrit

$$\delta A^\mu = -\frac{1}{2} \int \int \left[ \frac{\delta}{\delta x_\sigma} \left( \left\{ \begin{array}{c} \nu\alpha \\ \mu \end{array} \right\} A^\alpha \right) - \frac{\delta}{\delta x_\nu} \left( \left\{ \begin{array}{c} \sigma\alpha \\ \mu \end{array} \right\} A^\alpha \right) \right] \mathrm{d}s^{\nu\sigma}$$

$$\delta A^\mu = \frac{1}{2} \int \int R^\mu_{\rho\nu\sigma} \, A^\rho \, \mathrm{d}S^{\nu\sigma} \tag{B.98}$$

$$\text{de même} \qquad \delta A_\mu = \frac{1}{2} \int \int R^\rho_{\mu\nu\sigma} \, A_\rho \, \mathrm{d}S^{\nu\sigma}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que Ia variation soit nulle est que le tenseur de Riemann-Christoffel soit nul, c'est-à-dire que I'Univers soit euclidien. La non-intégrabilité de la direction caractérise donc le champ de gravitation.

De même, la non-intégrabilité de la longueur doit caractériser un champ d'une autre nature. Ne serait-ce pas le champ électromagnétique ?

Puisque nous ne sommes pas certains qu'on puisse définir une unité valable en tous les points, nous devons définir une unité en chaque point-événement de l'Univers ; nous appellerons *jauge* l'unité d'intervalle choisie en chaque point. Le système de jauges est arbitraire comme le système de coordonnées : il faut, dans le cas le plus général, diviser I'Univers en cellules par un systeme quelconque de coordonnées et dans chaque cellule infiniment petite adopter une jauge. Les jauges sont seulement soumises, à la condition d'être infiniment peu différentes dans deux cellules infiniment voisines, ce qui est possible car l'ambiguîté disparaît à la limite pour un déplacement infiniment petit. Lorsque les jauges étaient supposées les mêmes partout, dix mesures d'intervalles d$s$ autour d'un point permettaient de déterminer les dix $g_{\mu\nu}$, et de décrire le champ de gravitation ; maintenant 14 mesures vont être nécessaires pour déterminer Ies $g_{\mu\nu}$, et 4 « potentiels » supplémentaires qui paraissent bien correspondre aux composantes du quadrivecteur potentiel électromagnétique. Les 14 potentiels $g_{\mu\nu}$ et $\varphi_\mu$ défnissent la géométrie du système de coordonnées et du système de jauges, et contiennent en eux la structure de I'Univers.

Faisons décrire à un vecteur $A_\mu$, par déplacement parallèle, un contour fermé infiniment petit, limitant $\mathrm{d}S^{\nu\sigma}$ ; d'après (B.97) sa variation est

$$\delta A^\mu = \frac{1}{2} R^\epsilon_{\mu\nu\sigma}\, A_\epsilon \, \mathrm{d}S^{\nu\sigma} = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\sigma\rho}\, A^\rho \, \mathrm{d}S^{\nu\sigma} \tag{B.99}$$

$\mathrm{d}A_\mu$ est orthogonal à $A_\mu$, parce que, $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ étant symétrique gauche en $\mu$ et $\rho$, on a

$$\delta A^\mu \mathrm{d}A_\mu = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\sigma\rho}\, A^\mu \, A^\rho \, \mathrm{d}S^{\nu\sigma} = 0 \tag{B.100}$$

La longueur genéralisée du vecteur n'a pas change, seule sa direction a varié. C'est la restriction admise dans la théorie d'Einstein. Supprimant cette restriction, nous devons remplacer $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ par un tenseur d'un type plus général ${}^*R_{\mu\nu\sigma\rho}$. Or on peut écrire

$$\left\{ \begin{array}{ll} B_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{1}{2}({}^*R_{\mu\nu\sigma\rho} - {}^*R_{\rho\nu\sigma\mu}) & \text{sym. gauche en } \mu \text{ et } \rho \\ F_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{1}{2}({}^*R_{\mu\nu\sigma\rho} + {}^*R_{\rho\nu\sigma\mu}) & \text{sym. en } \mu \text{ et } \rho \end{array} \right. \tag{B.101}$$

$$\delta A_\mu = \frac{1}{2} {}^*R_{\mu\nu\sigma\rho}\, A^\rho \, \mathrm{d}S^{\nu\sigma} = \frac{1}{2}(B_{\mu\nu\sigma\rho} + F_{\mu\nu\sigma\rho}) A^\rho \, \mathrm{d}S^{\nu\sigma} \tag{B.102}$$

Comme la variation doit être annulée quand on décrit le circuit une seconde fois en sens inverse du premier parcours, tous ces tenseurs doivent être symétriques gauches en $\nu$ et $\sigma$.

Soit $l$ la longueur généralisée de $A_\mu$ ; on voit que $(l + \mathrm{d}l)^2 = (A_\mu + \mathrm{d}A_\mu)\,(A^\mu + \mathrm{d}A^\mu) = l^2 + 2A^\mu\,\mathrm{d}A_\mu$

$$2l\mathrm{d}l = {}^*R_{\mu\nu\sigma\rho} A^\mu \, A^\rho \, \mathrm{d}S^{\nu\sigma} = F_{\mu\nu\sigma\rho} A^\mu \, A^\rho \, \mathrm{d}S^{\nu\sigma} \tag{B.103}$$

M. Weyl a adopté une limitation : il a supposé que $F_{\mu\nu\sigma\rho}$ est décomposable en $g_{\mu\rho} F_{\nu\sigma}$ ; $2^o$ que $F_{\nu\sigma}$ est le rotationnel d'un vecteur. D'après la première condition (B.103) devient

$$2l\mathrm{d}l = F_{\nu\sigma}(g_{\mu\rho}A^{\mu}\,A^{\rho})\mathrm{d}S^{\nu\sigma} = F_{\nu\sigma}l^2\mathrm{d}S^{\nu\sigma} \tag{B.104}$$

d$l$ est donc proportionnel à $l$ et indépendant de la direction du vecteur.

Les différentes surfaces limitées à un même contour devant conduire à une même valeur de $\delta A_{\mu}$, l'intégrale de surface doit porter sur un rotationnel, d'où la seconde condition de Weyl.

Soit maintenant une règle extrèmement courte, de longeur généralisée $l$ (note 11). Déplaçons-la de d$x_1$, d$x_2$, d$x_3$, d$x_4$. $F_{\nu\sigma}$ étant le rotationnel d'un vecteur, nous pouvons écrire

$$\frac{\mathrm{d}l}{l} = \varphi_1\,\mathrm{d}x_1 + \varphi_2\,\mathrm{d}x_2 + \varphi_3\,\mathrm{d}x_3 + \varphi_4\,\mathrm{d}x_4 \tag{B.105}$$

les $\varphi_{\mu}$ étant quatres fonctions du point, qui sont les composantes d'un quadrivecteur d'Univers.

Comme les $g_{\mu\nu}$, les $\varphi_{\mu}$ dépendent d'une propriété intrinsèque de l'espace-temps et du système employé. De même que les $g_{\mu\nu}$ ne peuvent pas prendre des valeurs complètements indépendantes (loi de la gravitation), de même les $\varphi_{\mu}$ doivent satisfaire une loi.

Intégrons (B.105), nous avons

$$\log l + c^{te} = \int \varphi_1\,\mathrm{d}x_1 + \varphi_2\,\mathrm{d}x_2 + \varphi_3\,\mathrm{d}x_3 + \varphi_4\,\mathrm{d}x_4 \tag{B.106}$$

La longueur sera indépendante du chemin suivi (intégrable) si le rotationnel des $\varphi_{\mu}$ est nul (condition d'intégrabilité).

$$\frac{\delta\varphi_{\mu}}{\delta x_{\nu}} - \frac{\delta\varphi_{\nu}}{\delta x_{\mu}} = 0 \tag{B.107}$$

Faisons l'hypothèse que les $\varphi_{\nu}$ représentent le potentiel électromagnétique (à un facteur constant près) ; l'annulation du rotationnel exprime, d'après (B.81), que le champ électromagnétique est nul. Si cette condition est réalisée, les $g_{\mu\nu}$ suffisent pour déterminer la structure de l'Univers. Dans le cas contraire la structure est exprimée par 14 potentiels, les $g_{\mu\nu}$ qui décrivent les propriétés gravifiques, les $\varphi_{\mu}$ qui décrivent les propriétés électromagnétiques.

La loi des $\varphi_{\mu}$ est trouvée : c'est la généralisation tensorielle des équations de Maxwell. L'union de cette loi et de celle de la gravitation constitue la loi générale de la structure d'Univers.

Changer de système de jauges, c'est ajouter au second membre de (B.106) une fonction de point arbitraire, ou ajouter au second membre de (B.105) une différentielle totale. Les $\varphi_{\mu}$ ne sont donc déterminés qu'à des fonctions $\varphi'_{\mu}$

près, pourvu que ces fonctions soient telles que $\varphi'_\mu \, \mathrm{d}x_\mu$ soit une diférentielle exacte. Cette indétermination du système de jauges ne modifie en rien le rotationnel de sorte que les *forces électriques et magnétiques sont independanles du système de jauges*.

Nous avons vu que la quadruple indétermination des coordonnées conduit à quatre identités qui ont pour conséquence la conservation de l'impulsion-énergie. De même, l'indétermination du système de jauges entraîne une loi supplémentaire de conservation : c'est la conservation de l'électricité (note 14).

### B.6.2 Généralisation d'Eddington

La limitation de Weyl a pour but de donner un caractère absolu à la longueur nulle, de manière que la lumière ait une trajectoire bien définie (intervalle constamment nul).

Cependant M. Eddington a réussi à supprimer cette dernière restriction. Dans la théorie d'Eddington, la variation d'un vecteur par déplacement parallèle dépend non seulement du chemin suivi, mais de l'orientationdu vecteur pendant son déplacement. L'Univers n'est assujetti qu à une condition : celle de posséder une structure géométrique ; c'est le moins qu'on puisse supposer, et l'on ne saurait s'elever à un plus haut degré de généralisation.

*Théorie géométrique* - Prendre au système de coordonnees signifie choisir 4 familles d'espaces pour diviser l'Univers en cellules ; dans chacune de ces familles, chaque espace peut être caractérisé par un nombre. Un déplacement $\mathrm{d}x_\mu$ est donc un *vecteur absolu*, puisqu'il peut s'exprimer par des *nombres purs*, indépendants de tout système de jauges.

M. Eddington a montré qu'en supprimant toute restriction, et conservant seulement la condition (évidemment nécessaire) que l'Univers ait une structure géométrique, et possède en chaque point un Univers euclidien tangent, la formule (B.98) est remplacée par

$$\delta A^\mu = \frac{1}{2} \int \int {}^*R^\mu_{\rho\nu\sigma} \, A^\rho \, \mathrm{d}S^{\nu\sigma} \tag{B.108}$$

où ${}^*R^\mu_{\rho\nu\sigma}$ tenseur de Riemann-Christoffel *généralisé*, est *absolu*, c'est-à-dire indépendant de tout système de jauges. Dans ce tenseur, les symboles de Chritoffel du tenseur ordinaire sont remplaces par des symboles généralisés, qui sont absolus, parce qu'ils s'introduisent sans que le système de jauges intervienne. On a

$${}^*\left\{ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \tau \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mu\nu \\ \tau \end{array} \right\} + S^\tau_{\mu\nu} \tag{B.109}$$

$S^{\tau}_{\mu\nu}$ étant un tenseur symétrique en $\mu$ et $\nu$ (non absolu). Contractant ${}^{*}R^{\mu}_{\rho\nu\sigma}$, on obtient la généralisation de $R_{\rho\nu}$.

*Les deux tenseurs absolus* ${}^{*}R^{\mu}_{\rho\nu\sigma}$ *et* ${}^{*}R_{\rho\nu}$ *traduisent les propriétés intrisèques du continuum. On n'en voit pas d'autres jouissant des mêmes propriétés.*

Pour introduire les $g_{\mu\nu}$, il faut adopter un système de jauges. Nous définissons la longueur $l$ d'un déplacement $A^{\mu}$ par

$$l^2 = g_{\mu\nu}\, A^{\mu}\, A^{\nu} \tag{B.110}$$

$l^2$ est invariant à l'égard du système de coordonnées ; $g_{\mu\nu}$ est un tenseur symétrique. Un système de coordonnées étant adopté, les $A^{\mu}$ sont des nombres purs ; mais $l^2$ dépend, par les $g_{\mu\nu}$, du système de jauges ; la longueur n'est pas un invariant *absolu*, c'est une convention purement géométrique.

Posons

$$2\varphi_{\mu} = S^{\sigma}_{\sigma\mu} \tag{B.111}$$

et soit $\varphi_{\mu\nu}$ la dérivée covariante du quadrivecteur $\varphi_{\mu}$.

On peut écrire

$$B_{\mu\nu} = \frac{{}^{*}R_{\mu\nu} + {}^{*}R_{\nu\mu}}{2}, \qquad F_{\mu\nu} = \frac{{}^{*}R_{\mu\nu} - {}^{*}R_{\nu\mu}}{2} \tag{B.112}$$

$${}^{*}R_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \tag{B.113}$$

$B_{\mu\nu}$ est symétrique et $F_{\mu\nu}$ symétrique gauche. On démontre que

$$F_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} - \varphi_{\nu\mu} = \frac{\delta\varphi_{\mu}}{\delta x_{\nu}} - \frac{\delta\varphi_{\nu}}{\delta x_{\mu}} \quad \text{(rot. de } \varphi_{\mu}\text{)} \tag{B.114}$$

Les tenseurs $B_{\mu\nu}$ et $F_{\mu\nu}$ sont des tenseurs absolus.

Le tenseur ${}^{*}R_{\mu\nu\sigma\rho}$ se divise de même en deux tenseurs

$${}^{*}R_{\mu\nu\sigma\rho} = B_{\mu\nu\sigma\rho} + F_{\mu\nu\sigma\rho} \tag{B.115}$$

le premier symétrique gauche en $\mu$ et $\rho$, le second symétrique en $\mu$ et $\rho$, symétriques gauches tous ldeux en $\nu$ et $\sigma$. Mais aucun de ces tenseurs n'est absolu, car les $g_{\mu\nu}$ interviennent pour abaisser l'indice $\rho$.

La variation d'un vecteur est ainsi mise sous la forme (B.102) et l'on a la formule (B.103), sans restriction.

*Invariants absolus* - Il n'existe pas de fonction invariante absolue des potentiels, mais on peut trouver des densités invariantes absolues.

$${}^{*}(R)^2\,\sqrt{-g}, \qquad {}^{*}R_{\mu\nu}\,{}^{*}R^{\mu\nu}\,\sqrt{-g}, \qquad {}^{*}R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}\,{}^{*}R^{\mu\nu\sigma}_{\rho}\,\sqrt{-g},$$

$$F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}\, \sqrt{-g}, \qquad g^{\alpha\beta}\, ({}^{*}R)_{\alpha\beta}\, \sqrt{-g}$$

${}^{*}R$ étant le scalaire $g^{\mu\nu}\, {}^{*}R_{\mu\nu}$. Il existe peut-être encore une densité invariante absolue dérivée de ${}^{*}R_{\mu\nu\sigma\rho\alpha\beta}$.

Le nombre des caractères d'Univers distincts dont les combinaisons peuvent s'exprimer par des *nombres purs, independants de tout système de coordonnées et de jauges* ne dépasse probablement pas 6.

Weyl a fait remarquer que c'est seulement dans un univers à nombre pair de dimensions que Ies tenseurs fondamentaux donnent naissance à des densités invariantes absolues. *On ne saurait imaginer un univers à nombre impair de dimensions, car il n'aurait aucun caractère absolu.*

En plus de ces densités absolues, qui sont des caractéristiques absolues de I'Univers en chaque point, il y a un invariant absolu simple lié à un déplacement $A^{\mu}$ : c'est

$${}^{*}R_{\mu\nu}\, A^{\mu}\, A^{\nu}$$

d'autres combinaisons plus compliquées pourraient être imaginées.

*Identifications physiques - le système de jauges naturel* - Si nous voulons que la longueur (form. B.110) cesse d'être une convention géométrique pour devenir une ebntité physique, il faut que $l^2$ soit un invariant absolu lié à un déplacement $A^{\mu}$ et qui soit une forme quadratique : c'est ${}^{*}R_{\mu\nu}\, A^{\mu}\, A^{\nu}$. Nous sommes donc conduits à considérer cet invariant comme donnant une mesure naturelle de la longueur et nous devons poser

$$l^2 = g_{\mu\nu}\, A^{\mu}\, A^{\nu} = \frac{1}{\lambda}{}^{*}R_{\mu\nu}\, A^{\mu}\, A^{\nu} = \frac{1}{\lambda}B_{\mu\nu}\, A^{\mu}\, A^{\nu} \qquad \text{(B.116)}$$

D'où

$$B_{\mu\nu} = \lambda\, g_{\mu\nu} \qquad \text{(B.117)}$$

$\lambda$ étant une constante universelle, qui nous laisse d'ailleurs libres d'adopter telle unite de longueur que nous voulons en un point d'Univers déterminé. Le choix étant fait en un point, les jauges en tous les points sont fixées par (B.117).

La différence qui sépare $B_{\mu\nu}$ du tenseur $R_{\mu\nu}$ de la théorie d'Einstein provient des termes issus de $S^{\tau}_{\mu\nu}$. Nous allons voir que ce tenseur $S^{\tau}_{\mu\nu}$, détermine les phénomènes électromagnetiques ; plus le champ électromagnétique est faible, c'est-à-dire plus l'espace est vide, plus $B_{\mu\nu}$ est voisin de $R_{\mu\nu}$. Dans le vide, l'équation fixant le système de jauges est

$$R_{\mu\nu} - \lambda\, g_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{(B.118)}$$

C'est précisément la loi de la gravitation d'Einstein, qui est obtenue ainsi par des considérations aussi générales que possible, absolument indépendantes de celles qui ont été exposées précédemment. Ce résultat nous montre que, dans le vide, l'Univers est effectivement jaugé conformément au systeme de jauges naturel, ou encore qu'en transportant les étalons d'un point a un autre pour la comparaison des intervalles on emploie, dans le vide, le système naturel.

*Propagation de la lumière.* - Une perturbation lumirieuse issue d'un point occupe dans l'univers un cône qui doit satisfaire une equation de la forme

$$a_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x_\nu = 0 \tag{B.119}$$

Comme ce cône est bien déterminé et n'a aucun rapport avec un système quelconque de coordonnées ou de jauges, il est nécessaire que $a_{\mu\nu}$ soit un tenseur absolu : ce ne peut être que ${}^*R_{\mu\nu}$. On a donc

$${}^*R_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x_\nu = B_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x_\nu = 0 \tag{B.120}$$

Nous voyons que dans la théorie d'Einstein, où la propagation de la lumière s'exprime par

$$\mathrm{d}s = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x_\nu = 0$$

l'Univers est jaugé conformément à l'équation (16-21), partout où la lumiere se propage, c'est-à-dire en tout point (sauf à l'intérieur de l'électron). $\lambda$ pourrait être une fonction de point, mais la loi de la gravitation dans le vide nous montre que c'est une constante..

Le fait que, dans nos observations, la lumiere a une propagation parfaitement définie prouve que nous effectuons nos mesures avec le système de jauges naturel. Il est vrai que dans un champ électromagnétique il existe une ambiguïté concernant la longueur mais cette ambiguïté disparaît pour un déplacement infiniment petit, et si nous transportons nos étalons d'un point à un autre dans un domaine très petit pour comparer des intervalles, nous employons le système naturel à une quantité du second ordre près.

Eddington a donc réussi à supprimer la difficulté qui avait conduit Weyl à poser $F_{\mu\nu\sigma\rho} = g_{\mu\nu}\,F_{\nu\sigma}$. La longueur nulle peut ne pas rester nulle par déplacement parallèle ; peu importe, puisque le cône lumineux est défini par la seule équation invariante absolue qu'on puisse former.

*La courbure constante.* - Prenant les scalaires des deux membres de (B.117), on a, *en tout point*

$$B = {}^*R = 4\lambda$$

qui dans le vide devient

$$R = 4\lambda$$

Il est évident que $\lambda$ n'est pas nul, car il n'y aurait plus de système de jauges naturel. Nous sommes donc directement conduits à la conception de la courbure constante et de l'espace fermé. La constance de la courbure est imposue par la condition qui détermine le système de jauges : cela revient à dire que le systeme naturel consiste à prendre pour jauge en chaque point le rayon de courbure d'Univers ou encore que tout objet est une portion déterminée et constante de l'Univers ; que tout électron doit avoir pour rayon une fraction constante du rayon de courbure d'Univers au point où il se trouve. Si le rayon d'Univers changeait d'un point à l'autre - par rapport à un surétalon que nous ne saurions d'ailleurs imaginer - l'électron, nos instruments, nous-mêmes, tout changerait dans le même rapport ; par conséquent le rayon de courbure doit nous apparaître comme constant. comme constant.

$^*R$ a la même valeur partout. Si l'on conserve le point de vue de la théorie d'Einstein, en séparant le champ de gravitation et le champ électromagnétique, et si l'on appelle courbure le scalaire $R$ qui ne fait pas intervenir les $S^{\sigma}_{\mu\nu}$ on doit considèrer les électrons comme des déformations locales. L'électron devient une région de forte courbure, bien que, avec le système naturel, $^*R$ ait la même valeur que dans le vide. Cela signifie que les $S^{\sigma}_{\mu\nu}$ qui font différer $B_{\mu\nu}(= \lambda\, g_{\mu\nu})$ de $R_{\mu\nu}$ doivent être considérables dans l'électron ; autrement dit, le champ électrique doit être colossal.

*Matière et électricité.* - Pour identifier la substance contenue dans l'espace, nous devons chercher les tenseurs géométriques qui correspondent aux tenseurs physiques. Ces tenseurs n'ont d'ailleurs pas besoin d'être absolus car nous utilisons le système de jauges naturel (aux faibles erreurs près dues à l'ambiguïté résultant de la non-intégrabilité des longueurs) et nous n'avons aucune raison de penser que les lois de notre science se conserveraient toutes dans un système de espace arbitraire.

Tout d'abord, rien n'est changé à la loi de la gravitation dans la matière, car la généralisation de Weyl-Eddington n'introduit pas de nouveau tenseur à divergence nulle auquel on puisse identifier $T^{\nu}_{\mu}$

Le tenseur $F_{\mu\nu}$ des forces électrique et magnétique doit satisfaire le premier groupe des équations deMaxwell généralisées, et ces équations deviennent des identités (B.77) si $F_{\mu\nu}$ est le rotationnel d'un vecteur. Nous voyons qu'il n'y a qu'un seul tenseur géométrique que nous puissions identifler avec le tenseur des forces électrique et magnétique,c'est celui que nous avons précisément désigné par $F_{\mu\nu}$ (B.113). Le vecteur $\varphi_{\mu}$ dont $F_{\mu\nu}$, est le rotationnel, est le potentiel.

Le vecteur courant-densité de charge doit satisfaire à la loi expérimentale de conservation de l'électricité. Il faut donc que $J^{\mu}_{\mu} = 0$ ; cette équation devient une identité si $J^{\mu}$ est la divergence d'un tenseur symetrique gauche contrevariant ; nous devons donc identifier $J^{\mu}$ avec la divergence de $F^{\mu\mu}$ ; nous obtenons ainsi le second groupe de Maxwell.

*L'électron.* - Nous avons vu (note 14) qu'il est impossible de construire un électron et par conséquent de la matière à partir du champ électromagnétique *seul* ; on sait d'ailleurs que l'électron ne peut exister qu'en admettant des forces de cohésion non maxwelliennes (pressions de Poincaré). *Si l'on admet la continuité* dansla structure géométrique de l'Univers, il est possible de calculer en chaque point le scalaire $T$ du tenseur total d'énergie c'est-à-dire « la densité de substance ». L'expression est d'ailleurs assez compliquée. Le résultat intéressant est le suivant : il est permis de penser que les forces de cohésion, jusqu'alors mystérieuses, qui permettent l'existence de l'électron sont les $S^{\tau}_{\mu\nu}$ qui ajoutees aux composantes $\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix}$ du champ de gravitation constitue les *forces absolues* $^{*}\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix}$ (éq. B.109). L'union du tenseur de gravitation $g_{\mu\nu}$ et du tenseur d'électricité $S^{\tau}_{\mu\nu}$ (ou plutôt d'un tenseur $\varphi_{\mu\nu\sigma}$ à partir duquel sont formé les $S^{\tau}_{\mu\nu}$) ou plus simplement, si l'on admet la restriction de Weyl, l'union des $g_{\mu\nu}$ et de $\varphi_{\mu}$ suffit pour rendre compte de l'existence des électrons et de la matière, alors que le champ de gravitation et les forces maxwelliennes $F_{\mu\nu}$ ne suffisaient pas.

« Le potentiel électromagnétique a en lui quelque chose de fondamental qui disparaît quand on en prend le rotationnel pour obtenir la force électromagnétique observable » (Eddington).

Toutefois dans le problème de la matière, il ne paraît pas exact de supposer une structure d'Univers continue, car l'expérience nous a révélé l'étrange loi des *quanta*. Les lois du continu ne sont probablement pas applicables à l'électron, mais on ne voit pas où intervient une discontinuité dans la constitution de l'électron.

Les généralisations de Weyl et d'Eddington complètent la théorie d'Einstein sans l'altérer. On peut, dans la description géométrique de l'Univers, considérer séparément le tenseur $B_{\mu\nu}$ (ou $g_{\mu\nu}$) qui décrit le champ de gravitation et le tenseur $F_{\mu\nu}$ qui décrit le champ électromagnétique : c'est ce qu'avait fait Einstein ; l' « intervalle » d'Einstein est absolu, puisque c'est l'invariant absolu $B_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x_{\mu}\, \mathrm{d}x_{\nu}$. L'oeuvre d'Einstein reste donc intacte ; elle n'est atteinte en rien par l'ambiguïté que l'existence du champ électromagnétique apporte dans la comparaison des longueurs.

# Bibliographie


[1] Lorenz - Einstein - Minkowski, *Das Relativitatspeinzip*, nouvelle édition (Teubner)

[2] A. Einstein, *La théorie de la relativité restreinte et généralisée, mise à la portée de tout le monde*, Traduit par M$^{lle}$ J. Rouvière

[3] A. Einstein, *L'éther de la relativité*, Traduit par M. Solovine

[4] P. Langevin, *L'évolution de l'espace et du temps*, Scienta 1911

[5] P. Langevin, *Le temps, l'espace et la causalité dans la physique moderne*, Buletin de la société de philosophie (19 oct. 1911)

[6] P. Langevin, *L'inertie de l'énergie*, Conférence à la société de physique (17 mars 1913) publié dans le Journal de physique

[7] P. Langevin, *Le principe de relativité*, Bulletin de la société des électricienrs, déc. 1919

[8] H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, édition 1921 (Springer éd.)

[9] Max von Laue, *Die Relativitatsheorie*, t. I (1919) et t. II (1922) (Vieweg & Sohn, éd.)

[10] A.-S. Eddington, *Report on the relativity theory of gravitation*, 1920 (publié par la Société de physique de Londres)

[11] A.-S. Eddington, *Espace, temps et gavitation*, (1921) traduit par M. Jacques Rossignol

[12] De Sitter, *On Einstein theory of Gravitation, and its astronomical consequences.*, Monthly notices, oct. 1916, déc. 1916, nov 1917

[13] Jean Becquerel, *Le principe de la relativité et la théorie de la gravitation*, 1922 (Gauthier Villars, éd.)