Sommes de deux entiers élevés au carré
Classification en catégorie
Relations entre les catégories

Benoit De Coninck

12 mars 2019

1 Introduction

En comparant la somme de 2 entiers élevés au carré, on constante que certains résultats sont obtenus de plusieurs manière différente. Par exemple : $85 = 6^2 + 7^2 = 2^2 + 9^2$ ou $1825 = 12^2 + 41^2 = 15^2 + 40^2 = 23^2 + 36^2$. Les résultats de ces calculs permet de répartir les sommes obtenues en différentes catégories ayant en commun le nombre de manière différente de combiner les sommes de 2 entiers élevés au carré (dans l'exemple, 85 appartient à la catégorie 2 et 1825 à la catégorie 3).

Le but de ce document est de déterminer des règles d'appartenance d'une somme à une catégorie précise.

2 Relations entre deux sommes

Il existe plusieurs relations connues entre deux sommes différentes, par exemple :

- Si $M = a^2 + b^2$, alors $n^2 \times M = n^2 \times (a^2 + b^2) = (n \times a)^2 + (n \times b)^2$;
- Soit $m = 4k+1$ nombres premiers de Pythagore [1], si $M = a^2+b^2$, alors $m \times M$ est une somme de 2 carrés ;
- Si $M = a^2 + b^2$, alors $2 \times M = (a + b)^2 + (a - b)^2$.

Le tableau (1) reprend les premières sommes des catégories 2 et 3 pour quelques éléments ainsi que leurs décompositions en facteurs premiers. Plusieurs

1. les nombres premiers de Pythagore sont les nombres premiers impairs sommes de deux carrés qui sont de la forme $4k + 1$. Les nombres premiers de Pythagore sont 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109, 113, 137, 149, 157, ...

Catégorie 2		Catégorie 3	
Somme	Développement	Somme	Développement
50	2×5^2	325	$5^2 \times 13$
65	5×13	425	$5^2 \times 17$
85	5×17	650	$2 \times 5^2 \times 13$
125	5^3	725	$5^2 \times 29$
130	$2 \times 5 \times 13$	845	5×13^2
145	5×29	850	$2 \times 5^2 \times 17$
170	$2 \times 5 \times 17$	925	$5^2 \times 37$
185	5×37	1025	$5^2 \times 41$
200	$2^3 \times 5^2$	1250	2×5^4
205	5×41	1300	$2^2 \times 5^2 \times 13$
221	13×17	1325	$5^2 \times 53$
250	2×5^3	1445	5×17^2
260	$2^2 \times 5 \times 13$	1450	$2 \times 5^2 \times 29$
265	5×53	1525	$5^2 \times 61$
290	$2 \times 5 \times 29$	1690	$2 \times 5 \times 13^2$
305	5×61	1700	$2^2 \times 5^2 \times 17$
338	2×13^2	1825	$5^2 \times 73$
340	$2^2 \times 5 \times 17$	1850	$2 \times 5^2 \times 37$
365	5×73	2050	$2 \times 5^2 \times 41$
370	$2 \times 5 \times 37$	2225	$5^2 \times 89$
377	13×29	2425	$5^2 \times 97$
410	$2 \times 5 \times 41$	2525	$5^2 \times 101$
442	$2 \times 13 \times 17$	2600	$2^3 \times 5^2 \times 13$
445	5×89	2650	$2 \times 5^2 \times 53$
450	$2 \times 3^2 \times 5^2$	2725	$5^2 \times 109$
481	13×37	2825	$5^2 \times 113$
485	5×97	2873	$13^2 \times 17$
493	17×29	2890	$2 \times 5 \times 17^2$
500	$2^2 \times 5^3$	2900	$2^2 \times 5^2 \times 29$

TABLE 1 – Catégories 2 et 3

séries illustrant les relations exprimées ci-dessus, montre que ces relations peuvent conserver la catégorie des sommes :

– type $m \times M$ de catégorie 2 : 5×13, 5×17, 5×29,... ou 3 : $5^2 \times 13$, $5^2 \times 17$, $5^2 \times 29$, ...;
– type $2 \times M$ de catégorie 2 : 5×13 et $2 \times 5 \times 13$ ou 3 : 5×13^2 et $2 \times 5 \times 13^2$;
– type $n^2 \times M$ de catégorie 2 : 5×17 et $2^2 \times 5 \times 17$ ou 3 : $5^2 \times 17$ et $2^2 \times 5^2 \times 17$;

3 Minimum des catégories

L'ensemble des sommes pour les entiers allant de 1 à 31624 (résultats allant de 2 à 1000014129) a été établi[2]. Cette réalisation permet d'obtenir le nombre de somme entrant dans chaque catégorie ainsi que le détail de ces différentes sommes.

Le tableau (2) reprend le nombre de sommes exclusivement constatées pour chaque catégories (exclusivement, c'est-à-dire que le nombre repris à la catégorie 2 n'intègre pas les nombres constatés dans les catégories supérieure), la valeur de la somme la plus faible ainsi que sa décomposition en facteurs premiers.

4 Réalité du passage entre catégories

L'observation du tableau (2) permet de détecter une première possibilité de passer d'une catégorie vers la catégorie directement supérieure. En effet, on constate que la décomposition en facteurs premiers commence généralement par 5 et quelquefois par 2. Du chapitre précédent, nous savons que lorsque le double d'un nombre est une somme de carrés, ce nombre est également une somme de carré qui, à première vue, reste dans la même catégorie. Des suites de ce type ont justement été détectées au chapitre précédent. En conclusion, s'il n'y a pas passage d'une catégorie à l'autre, une catégorie ne devrait pas commencer par un nombre pair.

Les catégories 2 ($50 = 2 \times 5^2$), 11 ($5281250 = 2 \times 5^6 \times 13^2$), 14 ($2442050 = 2 \times 5^2 \times 13^2 \times 17^2$) et 23 ($61051250 = 2 \times 5^4 \times 13^2 \times 17^2$) sont dans ce cas. Le passage d'une catégorie à l'autre est à l'évidence possible. Peut-on, connaissant la catégorie de départ, déterminer la catégorie d'arrivée (et inversement) ?

Un simple regard sur le tableau nous donne directement la réponse pour les catégorie 14 et 23. En effet :

2. Programme écrit en c pur, code source en annexe.

Catégorie	nbr de résultats	Somme	Développement
2	69632989	50	2×5^2
3	4467952	325	$5^2 \times 13$
4	26376719	1105	$5 \times 13 \times 17$
5	168302	8125	$5^4 \times 13$
6	3367012	5525	$5^2 \times 13 \times 17$
7	9086	105625	$5^4 \times 13^2$
8	4238767	27625	$5^3 \times 13 \times 17$
9	83887	71825	$5^2 \times 13^2 \times 17$
10	96072	138125	$5^4 \times 13 \times 17$
11	68	5281250	$2 \times 5^6 \times 13^2$
12	671148	160225	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29$
13	344	1221025	$5^2 \times 13^2 \times 17^2$
14	3428	2442050	$2 \times 5^2 \times 13^2 \times 17^2$
15	4041	1795625	$5^4 \times 13^2 \times 17$
16	262068	801125	$5^3 \times 13 \times 17 \times 29$
17	1	446265625	$5^6 \times 13^4$
18	26425	2082925	$5^2 \times 13^2 \times 17 \times 29$
20	10970	4005625	$5^4 \times 13 \times 17 \times 29$
21	134	44890625	$5^6 \times 13^2 \times 17$
22	31	30525625	$5^4 \times 13^2 \times 17^2$
23	15	61051250	$2 \times 5^4 \times 13^2 \times 17^2$
24	32948	5928325	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
25	7	303460625	$5^4 \times 13^4 \times 17$
27	349	35409725	$5^2 \times 13^2 \times 17^2 \times 29$
28	122	100140625	$5^6 \times 13 \times 17 \times 29$
30	435	52073125	$5^4 \times 13^2 \times 17 \times 29$
31	1	763140625	$5^6 \times 13^2 \times 17^2$
32	3579	29641625	$5^3 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
36	744	77068225	$5^2 \times 13^2 \times 17 \times 29 \times 37$
40	124	148208125	$5^4 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
45	1	885243125	$5^4 \times 13^2 \times 17^2 \times 29$
48	90	243061325	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41$

TABLE 2 – Minimum des catégories

- catégorie 14 : $2442050 = 2 \times 1221025$ qui est le point de départ de la catégorie 13 ;
- catégorie 23 : $61051250 = 2 \times 30525625$ qui est le point de départ de la catégorie 22 ;

donc, certaines multiplication par 2 font monter d'une catégorie les sommes. Lesquelles ?

Encore une fois, les 4 sommes sélectionnées présentent une particularité : en dehors du coefficient multiplicateur 2, tous les autres facteurs premiers ont un exposant pair. La demi-somme est donc à chaque fois un carré parfait : $25 = 5^2$, $2640625 = 1625^2$, $1221025 = 1105^2$ et $30525625 = 5525^2$. Le passage d'une catégorie vers la catégorie directement supérieure est réalisée lorsque la somme de la catégorie de départ est également un carré parfait.

Par exemple, si on prend la somme 50 de catégorie 2, elle provient de $2 \times 5^2 = 2 \times 25$. La somme 25 est de catégorie 1 avec $25 = 3^2 + 4^2$. Lorsque l'on multiplie cette somme par 2, il vient $50 = 2 \times 25 = (4+3)^2 + (4-3)^2$ par la règle vue au chapitre précédent et aussi évidemment $50 = 5^2 + 5^2$ qui découle du fait que 25 est un carré parfait en plus d'être une somme de catégorie 1. Cette explication s'applique également à la somme $2640625 = 5^6 \times 13^2 = 1625^2$ qui est de catégorie dix [3] et dont le double est de catégorie 11.

On peut donc envisager que les nombres pairs annoncés comme la valeur la plus faible de sa catégorie dans le tableau ci-dessus ne sont pas « *vraiment* » les valeurs les plus basses pertinentes. Pour la recherche de relations entres le catégories, les valeurs les plus basses à prendre en compte ne sont pas des transfuges de la catégorie directement inférieure. Ainsi, la catégorie 2 commencerait à $65 = 5 \times 13$ et la catégorie 11 à $126953125 = 5^{10} \times 13$ qui arrive en position 14 dans la liste de cette catégorie [4].

Dans la suite de l'analyse, il ne sera plus tenu compte de ces sommes de carré *transfuges* qui présentent un comportement particulier. Ce point sera développé en fin de document.

---

3. Les 10 sommes sont obtenues avec les couples d'entiers (1624,57), (1615,180), (1575,400), (1560,455), (1521,572), (1500,625), (1400,825), (1300,975), (1265,1020) et (1184,1113).

4. Pour l'anecdote, cette multiplication par 2 avec catégorie montante m'a permis de valider mon programme de calcul. En effet, toutes les sommes jusqu'à 10^9 ont été calculées et comparées. La catégorie 17 présentait alors une apparente faute. En effet, le tableau annonce 1 seul représentant exclusif à 17 sommes différentes ayant pour valeur 446265625 laissant penser que le suivant potentiel $2 \times 446265625 = 892531250 < 10^9$ aurait dû être détecté par le programme ... Moment de doute, jusqu'au constat que $\sqrt{446265625} = 21125$ et donc que 892531250 est repris dans la catégorie 18 et pas dans la catégorie 17.

5 Doublement des catégories

L'analyse du tableau (2) met rapidement en lumière une relation fréquente. En dehors du coefficient multiplicateur 2, tous les facteurs premiers sont des nombres de Pythagore. La progression de l'utilisation de ces facteurs premiers suit également la progression en catégorie (5 arrive avant 13 qui précède 17 qui devance 29 talonné par 37 ...). Cette progression, logique puisque nous nous sommes uniquement intéressé au nombre le plus bas de chaque catégorie, indique cependant un schéma de changement entre catégories. Le tableau (3) sélectionne certaines catégories dont la somme minimum (appartenant exclusivement à cette catégorie) suit une progression à logique constante. Cette logique est identique pour les différents points de départs sélectionnés.

Catégorie	Développement
3	$5^2 \times 13$
6	$5^2 \times 13 \times 17$
12	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29$
24	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
48	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41$
5	$5^4 \times 13$
10	$5^4 \times 13 \times 17$
20	$5^4 \times 13 \times 17 \times 29$
40	$5^4 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
8	$5^3 \times 13 \times 17$
16	$5^3 \times 13 \times 17 \times 29$
32	$5^3 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
9	$5^2 \times 13^2 \times 17$
18	$5^2 \times 13^2 \times 17 \times 29$
36	$5^2 \times 13^2 \times 17 \times 29 \times 37$

Table 3 – Doublement des catégories

Ce tableau (3) montre tout simplement qu'un doublement de catégorie est réalisé par la multiplication de la *demi-catégorie* par le nombre de Pythagore directement supérieur au dernier présent dans la liste des facteurs premiers.

En reprenant la suite des catégories du tableau(3), le tableau (4) donne des prédictions sur les nombres possiblement minimum pour les catégories doubles suivantes[5].

5. Un second programme écrit en c pur, code source en annexe, permet de déterminer

Catégorie	Nombre	Développement
96	12882250225	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53$
192	785817263725	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61$
384	57364660251925	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61 \times 73$
80	6076533125	$5^4 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41$
160	322056255625	$5^4 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53$
320	19645431593125	$5^4 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61$
64	1215306625	$5^3 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41$
128	64411251125	$5^3 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53$
256	3929086318625	$5^3 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61$
72	3159797225	$5^2 \times 13^2 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41$
144	167469252925	$5^2 \times 13^2 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53$
288	10215624428425	$5^2 \times 13^2 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61$

TABLE 4 – Prédiction de doublement des catégories

C'est le fait que le principe de doublement de la catégorie par ajout d'un nombre de Pythagore soit dans de nombreux cas la valeur la plus base de sa catégorie (voir tableau (2)), qui permet de penser que la valeur trouvée pour les catégories supérieurs reste la valeur minimum de cette catégorie.

Par extension, le nombre $5^3 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61 \times 73 \times 89 = 25527273812106625$ de catégorie 1024 est possiblement le plus petit nombre à dépasser les 1000 sommes de 2 entiers au carré.

Le cas de la suite des catégories en 2^n commence à 8, car le nombre le plus bas des catégories 2 et 4 ne se place pas dans ce schéma. Par contre, si on part de la catégorie 8 et que l'on fait le chemin inverse, on constate que $5^3 \times 13 = 1625$ et $5^3 = 125$ appartiennent bien respectivement aux catégorie 4 et 2 mais n'en sont pas la valeur minimum. La valeur minimum de la catégorie 4 est $5 \times 13 \times 17 = 1105$ et $5 \times 13 = 65$ est de catégorie 2. Ces constatations permettent donc de définir dans le tableau (5) une autre séquence de la famille 2^n qui croise la première séquence trouvée.

On constate également que les facteurs premiers de Pythagore utilisés dans les exemples se suivent dans l'ordre d'apparition. Ce n'est pas nécessaire et n'est que la conséquence du fait que le tableau (2) est établis en cherchant la valeur minimum pour chaque catégorie. On constate en consultant le tableau (1) qu'il présente des nombres dont la décomposition en facteurs premiers est : 5×13, 5×17, 5×53, 13×17 ..., ce qui importe dans ce cas est donc que

la catégorie d'un nombre quelconque. La plupart des nombres indiqués dans ce documents ont été vérifiés et correspondent bien à la catégorie annoncée.

Catégorie	Nombre	Développement
2	65	5×13
4	1105	$5 \times 13 \times 17$
8	32045	$5 \times 13 \times 17 \times 29$
16	1185665	$5 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
32	1185665	$5 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41$
64	2576450045	$5 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53$
128	157163452745	$5 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61$
256	11472932050385	$5 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61 \times 73$

TABLE 5 – Séquence de doublement de 2^n

la factorisation d'une somme de catégorie 2 soit le produit de deux nombres de Pythagore quelconque. Ainsi $97 \times 41 = 3977 = 61^2 + 16^2 = 56^2 + 29^2$ est de catégorie 2 . La même constatation vaut pour les catégories supérieures, $41 \times 73 \times 29 \times 109 = 9460873$ est de catégorie 8.

Pour une catégorie de la forme 2^n, le produit de facteurs premiers à la puissance 1 est composé de $n + 1$ termes.

6 Catégories et facteur $3/2$

Le tableau (6) met en avant d'autres rapprochements de principe identique.

Dans ce cas, la catégorie en n passe à la catégorie en $(3/2) \times n$ lorsque le premier facteur premier à la puissance 1 passe au carré. Cette constatation permet de compléter facilement dans les deux sens les suites partant des catégories 12 et 24 (tableau (7)).

Les dernières lignes des deux séries ne se terminent pas sur une prédiction entière (respectivement $27 \times (3/2) = 40.5$ et $81 \times (3/2) = 121.5$). La partie entière de la prédiction est cependant juste.

Dans le tableau (2), nous avons deux développements qui ne diffèrent que par les puissance des facteurs premiers : $5 \times 13 \times 17$ qui est de catégorie 4 et $5^2 \times 13^2 \times 17^2$ qui est de catégorie 13. On constate que si pour chaque élévation au carré, on multiplie la catégorie par (3/2), nous obtenons au départ de la catégorie 4 la valeur $4 \times (3/2) \times (3/2) \times (3/2) = 13.5$ une prédiction entière correcte de la catégorie de la seconde valeur.

Ces diverses constatations permettent finalement d'affirmer que pour passer de la catégorie n à la catégorie $(3/2) \times n$, n'importe quel facteur premier à la puissance 1 doit être porté au carré. Par exemple, comme $5 \times 13 \times 17$ est

Catégorie	Développement
6	$5^2 \times 13 \times 17$
9	$5^2 \times 13^2 \times 17$
10	$5^4 \times 13 \times 17$
15	$5^4 \times 13^2 \times 17$
12	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29$
18	$5^2 \times 13^2 \times 17 \times 29$
20	$5^4 \times 13 \times 17 \times 29$
30	$5^4 \times 13^2 \times 17 \times 29$
45	$5^4 \times 13^2 \times 17^2 \times 29$
24	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
36	$5^2 \times 13^2 \times 17 \times 29 \times 37$

TABLE 6 – Séquence 3/2

Catégories Prédite	Catégories Réelle	Développement
$12 \times (2/3)$	8	$5 \times 13 \times 17 \times 29$
	12	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29$
	18	$5^2 \times 13^2 \times 17 \times 29$
$18 \times (3/2)$	27	$5^2 \times 13^2 \times 17^2 \times 29$
$27 \times (3/2)$	40	$5^2 \times 13^2 \times 17^2 \times 29^2$
$24 \times (2/3)$	16	$5 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
	24	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
	36	$5^2 \times 13^2 \times 17 \times 29 \times 37$
$36 \times (3/2)$	54	$5^2 \times 13^2 \times 17^2 \times 29 \times 37$
$54 \times (3/2)$	81	$5^2 \times 13^2 \times 17^2 \times 29^2 \times 37$
$81 \times (3/2)$	121	$5^2 \times 13^2 \times 17^2 \times 29^2 \times 37^2$

TABLE 7 – Séquence 3/2 - suite

de catégorie 4, alors tant $5^2 \times 13 \times 17$, $5 \times 13^2 \times 17$ que $5 \times 13 \times 17^2$ sont de catégorie 6 et $5^2 \times 13^2 \times 17$, $5^2 \times 13 \times 17^2$ que $5 \times 13^2 \times 17^2$ sont de catégorie 9.

7 Catégories et facteur $5/3$

Le tableau (8) met en avant d'autres rapprochements de principe identique.

Catégorie	Développement
3	$5^2 \times 13$
5	$5^4 \times 13$
6	$5^2 \times 13 \times 17$
10	$5^4 \times 13 \times 17$
9	$5^2 \times 13^2 \times 17$
15	$5^4 \times 13^2 \times 17$
25	$5^4 \times 13^4 \times 17$
12	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29$
20	$5^4 \times 13 \times 17 \times 29$
18	$5^2 \times 13^2 \times 17 \times 29$
30	$5^4 \times 13^2 \times 17 \times 29$
24	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
40	$5^4 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
27	$5^2 \times 13^2 \times 17^2 \times 29$
45	$5^4 \times 13^2 \times 17^2 \times 29$

TABLE 8 – Séquence 5/3

Dans ce cas, la catégorie en n passe à la catégorie en $(5/3) \times n$ lorsqu'un facteur premier à la puissance 2 passe à la puissance 4.

8 Généralisation

Plusieurs sortes de progressions arithmétique sont détectables dans les différents tableaux et développements précédents (tableau (9)).

Ce tableau (9) permet de comprendre qu'une généralisation reprenant l'ensemble du changement de la valeur de l'exposant d'un des facteurs premier est possible.

Catégorie	Développement
2	5×13
3	$5^2 \times 13$
4	$5^3 \times 13$
5	$5^4 \times 13$
$\vdots$	$\vdots$
$C = m$	$5^{(m-1)} \times 13$
4	$5 \times 13 \times 17$
6	$5^2 \times 13 \times 17$
8	$5^3 \times 13 \times 17$
10	$5^4 \times 13 \times 17$
$\vdots$	$\vdots$
$C = 2 \times m$	$5^{(m-1)} \times 13 \times 17$
8	$5 \times 13 \times 17 \times 29$
12	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29$
16	$5^3 \times 13 \times 17 \times 29$
20	$5^4 \times 13 \times 17 \times 29$
28	$5^6 \times 13 \times 17 \times 29$
$\vdots$	$\vdots$
$C = 4 \times m$	$5^{(m-1)} \times 13 \times 17 \times 29$
16	$5 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
24	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
32	$5^3 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
40	$5^4 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
$\vdots$	$\vdots$
$C = 8 \times m$	$5^{(m-1)} \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$
32	$5 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41$
48	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41$
$\vdots$	$\vdots$
$C = 16 \times m$	$5^{(m-1)} \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41$

Table 9 – Progressions arithmétiques

En effet, si l'on s'attarde sur la première progression qui montre un simple changement d'une catégorie vers la catégorie directement supérieure est généralisable par $C = 5^{(C-1)} \times 13$, on peut établir directement que pour passer de la catégorie 2 à la catégorie 3 ($C_{\text{finale}} = 3/2\ C_{\text{départ}}$), il faut passer d'un exposant 1 à un exposant 2 ou que pour passer de la catégorie 3 à la catégorie 5 ($C_{\text{finale}} = 5/3\ C_{\text{départ}}$), il faut passer d'un exposant 2 à un exposant 4. Ces 2 coefficients multiplicateurs on été validés plus avant dans le développement.

Ce passage entre catégorie à l'aide des même coefficients multiplicateurs rationnels se retrouve dans toutes les autres progressions arithmétiques détectées.

Ainsi, dans la seconde séquence, le passage de la catégorie 4 à la catégorie 6 se réalise en portant le premier facteur premier de la puissance 1 à la puissance 2 et permet de changement de catégorie tel que $C_{\text{finale}} = 6/4\ C_{\text{départ}}$ ou que pour passer de la catégorie 6 à la catégorie 10 ($C_{\text{finale}} = 10/6\ C_{\text{départ}}$), il faut passer d'un exposant 2 à un exposant 4. Ces 2 coefficients multiplicateurs sont bien les même rationnels que ceux de la première séquence. Le même principe se retrouve dans toutes les autres séquences présentées.

Cette constatation permet d'établir la généralisation suivante : lorsque l'on porte la puissance d'un facteur premier de m vers n, on porte la catégorie du nombre de

$$\text{Catégorie finale} = \frac{n+1}{m+1} \times \text{Catégorie de départ}$$

Cette généralisation est également directement applicable au doublement de catégorie lors de l'ajout d'un facteur premier. En effet, dans le cas de l'ajout d'un facteur premier, on passe de $m = 0$ à $n = 1$ et donc la formule de généralisation donne :

$$\text{Catégorie finale} = \frac{1+1}{0+1} \times \text{Catégorie de départ} = 2 \times \text{Catégorie de départ}$$

9 Détermination directe de la catégorie

En poursuivant l'utilisation de la formule générale de passage d'une catégorie à l'autre, on montre que si l'on passe d'un facteur premier élevé à la puissance $m = 0$ à la puissance $n = 2$, on multiplie la catégorie par $\text{Catégorie finale} = \dfrac{2+1}{0+1} \times \text{Catégorie de départ} = 3 \times \text{Catégorie de départ}$ comme déjà constaté précédemment. Lorsque conjointement, on élève la puissance de deux nombre premiers de Pythagore respectivement de 0 à 1 et de 0 à

2, la formule donne Catégorie finale $= \frac{1+1}{0+1} \times \frac{2+1}{0+1} \times$ Catégorie de départ $=$ $2 \times 3 \times$ Catégorie de départ.

La catégorie d'un nombre dépend donc directement du produit des puissances des facteurs premiers de Pythagore augmentés de 1. Si l'on reprend le début du tableau des nombres minimum par catégorie (tableau (2)), on obtient le tableau (10).

Cat.	Développement	Produit des exposants + 1
2	5×13	$(1+1) \times (1+1) = 4$
3	$5^2 \times 13$	$(2+1) \times (1+1) = 6$
4	$5 \times 13 \times 17$	$(1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 8$
5	$5^4 \times 13$	$(4+1) \times (1+1) = 10$
6	$5^2 \times 13 \times 17$	$(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$
7	$5^4 \times 13^2$	$(4+1) \times (2+1) = 15$
8	$5^3 \times 13 \times 17$	$(3+1) \times (1+1) \times (1+1) = 16$
9	$5^2 \times 13^2 \times 17$	$(2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 18$
10	$5^4 \times 13 \times 17$	$(4+1) \times (1+1) \times (1+1) = 20$
11	$2 \times 5^6 \times 13^2$	$(6+1) \times (2+1) = 21$
12	$5^2 \times 13 \times 17 \times 29$	$(2+1) \times (1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 24$
13	$5^2 \times 13^2 \times 17^2$	$(2+1) \times (2+1) \times (2+1) = 27$
14	$2 \times 5^2 \times 13^2 \times 17^2$	$(2+1) \times (2+1) \times (2+1) = 27$
15	$5^4 \times 13^2 \times 17$	$(4+1) \times (2+1) \times (1+1) = 30$
16	$5^3 \times 13 \times 17 \times 29$	$(3+1) \times (1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 32$
17	$5^6 \times 13^4$	$(6+1) \times (4+1) = 35$
18	$5^2 \times 13^2 \times 17 \times 29$	$(2+1) \times (2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 36$
20	$5^4 \times 13 \times 17 \times 29$	$(4+1) \times (1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 40$
21	$5^6 \times 13^2 \times 17$	$(6+1) \times (2+1) \times (1+1) = 42$
22	$5^4 \times 13^2 \times 17^2$	$(4+1) \times (2+1) \times (2+1) = 45$
23	$2 \times 5^4 \times 13^2 \times 17^2$	$(4+1) \times (2+1) \times (2+1) = 45$

TABLE 10 – Produit des puissances

En première approximation, la catégorie d'un nombre est le produit des exposants (e) des facteurs premiers de Pythagore augmentés de 1 divisé par deux :

$$\text{Catégorie} = \frac{(e_5+1) \times (e_{13}+1) \times (e_{17}+1) \times (e_{29}+1) \ldots}{2}$$

Une première variation est visible pour les catégories 7, 13, 17, 22 qui présentent la particularité que tous les exposants des facteurs premiers de

Pythagore sont pairs. Dans ce cas, on constate la relation suivante : $(e_5 + 1) \times (e_{13} + 1) \times (e_{17} + 1) \times (e_{29} + 1) \ldots = 2 \times \text{Catégorie} + 1$. Il est tout aussi juste de considérer que dans ce cas, la catégorie donnée est la partie entière de la détermination générale de la catégorie.

Par exemple, pour $5^4 \times 13^2$, le calcul donne $\dfrac{(4+1) \times (2+1)}{2} = 7.5$, partie entière 7 d'où catégorie 7. La partie fractionnaire n'est pas perdue, mais permet de comprendre que si on ajoute un facteur premier de Pythagore à $5^4 \times 13^2$, on double la valeur de la catégorie de départ et que $5^4 \times 13^2 \times 17$ est bien de catégorie $7.5 \times 2 = 15$.

Les rapprochements les plus amusants sont ceux des catégories 13 et 14 ou 22 et 23 qui présentent respectivement le même résultat pour le produit des exposants des facteurs premiers de Pythagore. Nous avons vu précédemment que le produit par 2 d'un carré parfait ajoute 1 à la catégorie atteinte. C'est ce qui ce passe ici et nous permet de généraliser une troisième relation : $(e_5+1)\times(e_{13}+1)\times(e_{17}+1)\times(e_{29}+1)\ldots = 2\times\text{Catégorie}-1$ pour le double d'un carré parfait. Par exemple, la catégorie 11 donne le développement suivant $2\times5^6\times13^2$ qui donne le produit des exposants $(6+1)\times(2+1) = 21 = 2\times11-1$.

En résumé, si on pose que $\prod(e_i + 1)$ est le produit de tous les exposants des facteurs premiers de Pythagore augmentés de 1, nous avons les trois relations suivantes :

Minimum 1 exposant impair	$\prod(e_i + 1)$	$=$	$2 \times \text{Catégorie}$
Tous les exposants sont pairs	$\prod(e_i + 1)$	$=$	$2 \times \text{Catégorie} + 1$
$2 \times$ tous les exposants sont pairs	$\prod(e_i + 1)$	$=$	$2 \times \text{Catégorie} - 1$

10 Le plus petit nombre d'une catégorie

La généralisation du point précédent donne une piste pour déterminer le nombre le plus petit d'une catégorie : c'est le nombre le plus petit possible en exploitant les trois relations existant entre la catégorie et les facteurs premiers de Pythagore.

Un exemple, pour la catégorie 17, nous avons :

- Minimum 1 exposant impair $2\times17 = 34 = (33+1) = (1+1)\times(16+1)$ donc soit 5^{33}, soit $5^{16} \times 13$;
- Tous les exposants sont pairs $2\times17+1 = 35 = (34+1) = (6+1)\times(4+1)$ donc soit 5^{34}, soit $5^6 \times 13^4$;
- $2\times$ tous les exposants sont pairs $2 \times 17 - 1 = 33 = (32 + 1) = (10 + 1) \times (2 + 1)$ donc soit 2×5^{32}, soit $2 \times 5^{10} \times 13^2$;

Le gagnant est $5^6 \times 13^4 = 446265625$ valeur donnée dans le tableau général.

Pour catégorie 384, nous avons proposé précédemment comme valeur possiblement minimum le nombre $57364660251925 = 5^2 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61 \times 73$. Est ce correct ? En reprenant nos trois relations, nous avons :

- 1 exposant impair $2 \times 384 = 768 = 2^8 \times 3$ en première analyse 1 facteur au carré et 8 autres puissance 1 ;
- Exposants pairs $2 \times 17 + 1 = 769 = (768 + 1)$ donc 5^{768} ;
- $2\times$ exposants pairs $2 \times 17 - 1 = 767 = (58 + 1) \times (12 + 1)$ donc $2 \times 5^{58} \times 13^{12}$;

Le plus petit nombre sera donc dans la catégorie 1 exposant impair. Si 3 est obligatoirement (2+1) donc un carré, 2^8 peut être répartit différemment, par exemple $(1+1)^8$ ou $(3+1)\times(1+1)^6$ ou $(3+1)^2\times(1+1)^4$ ou $(3+1)^3\times(1+1)^2$ ou $(15+1) \times (1+1)^4$ ou $(63+1) \times (1+1)^2$, ou $(255+1)$. Les candidats sont donc :

- $57364660251925 = 5^2 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61 \times 73$;
- $51078122142125 = 5^3 \times 13^2 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61$;
- $185053524482125 = 5^3 \times 13^3 \times 17^2 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53$;
- $1721346935277125 = 5^3 \times 13^3 \times 17^3 \times 29^2 \times 37 \times 41$;
- ...

Le gagnant est $51078122142125 = 5^3 \times 13^2 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61$ valeur inférieure au possiblement minimum initiale. En effet, en passant de 5^2 à 5^3 et de 13 à 13^2, on multiplie la catégorie par $4/3 \times 3/2 = 2$ donc de la catégorie 192 à la catégorie 384 par une multiplication de $5 \times 13 = 65$ alors que le facteur premier de Pythagore disponible pour le doublement est 73.

Pour la catégorie 1024, le développement de $2\times1024 = 2048 = (1+1)^{11} = (3 + 1) \times (1 + 1)^9 = (3 + 1)^2 \times (1 + 1)^7$ donne les possibilités suivantes :

- $99045822390973705 = 5\times13\times17\times29\times37\times41\times53\times61\times73\times89\times97$;
- $25527273812106625 = 5^3 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61 \times 73 \times 89$;
- $48473137912876625 = 5^3 \times 13^3 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61 \times 73$;
- $191900504887963625 = 5^3 \times 13^3 \times 17^3 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61$;
- $959249589508056640625 = 5^{15} \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61$;
- ...

Dans ce cas, le nombre 25527273812106625 est bien le plus petit nombre de catégorie 1024. La suite de doublement de catégorie sera toujours dans la ligne du doublement par ajout d'un facteur premier de Pythagore jusqu'à ce que celui-ci dépasse $13^2 = 169$ soit 173. A partir de là, c'est la suite commençant par $5^3 \times 13^3 \times 17 \times 29 \ldots \times 157$ qui sera la plus petite[6].

6. A partir de la catégorie 262144, passant de 1707871051716593898644583048165125 à 1668382703700025253589216966126625. La progression reprendra alors avec 173 jusqu'à ce que à son tour $17^2 = 289$ soit plus petit que le nombre suivant de Pythagore, soit 293. Le doublement peut également être dû au passage d'une puissance 3 vers une puissance 7, soit pour $5^4 = 625$ qui est plus petit que $29^2 = 841$ et ainsi de suite.

11 Application de la recherche du plus petit nombre d'une catégorie

Le point précédent permet de rechercher les catégories non vue dans la détermination brute des catégories par calcul exhaustif et par exemple de compléter le tableau (2) jusqu'à la catégorie 50.

Le premier vide dans le tableau est celui de la catégorie 19, nous avons :

- Minimum 1 exposant impair $2\times19 = 38 = (1+1)\times(18+1) = 5^{18}\times13 = 49591064453125$;
- Tous les exposants sont pairs $2 \times 19 + 1 = 39 = (2 + 1) \times (12 + 1) = 5^{12} \times 13^2 = 41259765625$;
- $2\times$ tous les exposants sont pairs $2 \times 19 - 1 = 37 = (36 + 1) = 2 \times 5^{36} = 29103830456733703613281250$;

Le gagnant est $5^{12} \times 13^2 = 41259765625$ valeur à placer dans le tableau (2). Les valeurs manquante dans le tableau (2) sont reprisent dans la tableau (11).

Catégorie	Développement	Somme
19	$5^{12} \times 13^2$	41259765625
26	$5^{12} \times 13 \times 17$	53955078125
29	$2 \times 5^{18} \times 13^2$	1289367675781250
33	$5^{10} \times 13^2 \times 17$	28056640625
34	$5^{16} \times 13 \times 17$	33721923828125
35	$5^6 \times 13^4 \times 17$	7586515625
37	$5^4 \times 13^4 \times 17^2$	5158830625
38	$2 \times 5^4 \times 13^4 \times 17^2$	10317661250
39	$5^{12} \times 13^2 \times 17$	701416015625
41	$2 \times 5^2 \times 13^2 \times 17^2 \times 29^2$	2053764050
42	$5^6 \times 13^2 \times 17 \times 29$	1301828125
43	$2 \times 5^{16} \times 13^4$	8716125488281240
44	$5^{10} \times 13 \times 17 \times 29$	62587890625
46	$2 \times 5^{12} \times 13^6$	2356840332031240
47	$5^{18} \times 13^4$	108951568603515625
49	$5^{10} \times 13^2 \times 17^2$	476962890625
50	$5^4 \times 13^4 \times 17 \times 29$	8800358125

Table 11 – Valeurs manquantes du tableau (2)

Les tableaux (2) et (11) permettent de présenter exhaustivement les valeurs minimum des sommes de carré des catégories 2 à 50. Cette représentation est reprise aux figures (1) et (2) et permet de constater qu'entre la

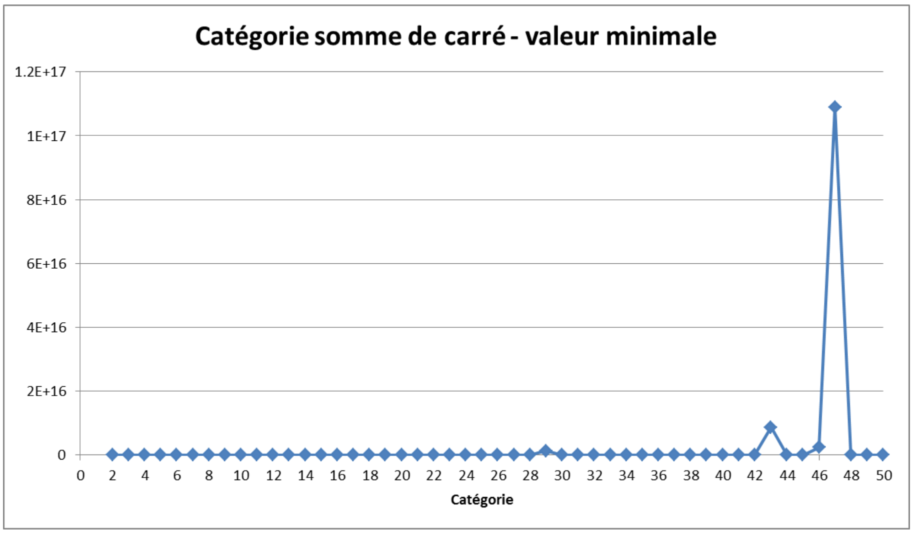

FIGURE 1 – Catégorie - valeur minimum

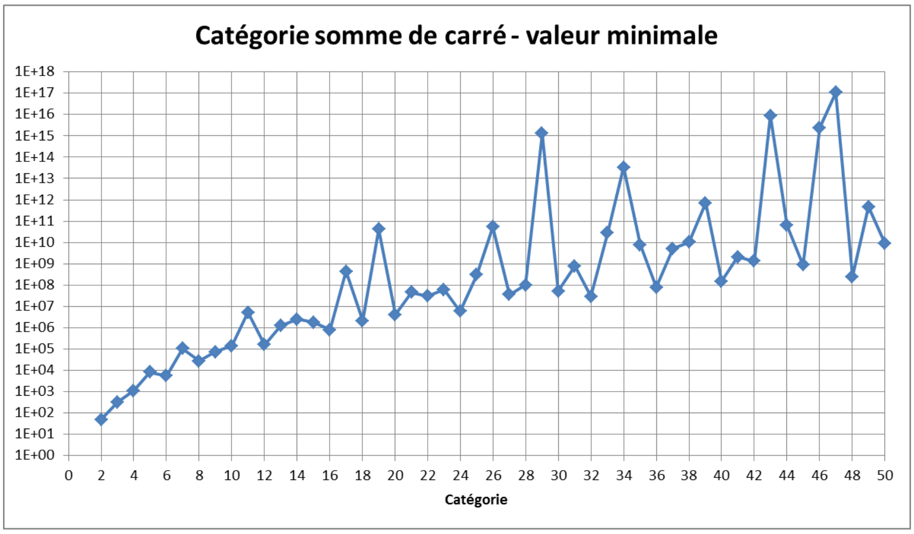

FIGURE 2 – Catégorie - valeur minimum - échelle logarithmique

catégorie 47 et 48, il y a 8 ordres de grandeurs.

Le même principe permet de vérifier que le nombre 25527273812106625 de catégorie 1024 est bien la plus petite somme de carrés à dépasser les 1000 sommes différentes comme le montre le tableau (12).

Catégorie	Développement	Somme
1000	$5^4 \times 13^4 \times 17^4 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53$	3476230457396718125
1001	$5^{12} \times 13^{10} \times 17^6 \times 29$	23559447489744647790283203125
1002	$5^{166} \times 13^2 \times 17 \times 29$	8,907469494e+120
1003	$5^{58} \times 13^{16} \times 17$	3,9246669650e+59
1004	$5^{40} \times 13^6 \times 17^6$	1.0596289511e+42
1005	$2 \times 5^{40} \times 13^6 \times 17^6$	$2 \times 1.0596289511e+42$
1006	$5^{60} \times 13^{10} \times 17^2$	3,4556649334e+55
1007	$5^{30} \times 13^{12} \times 17^4$	1,8122413824e+39
1008	$5^6 \times 13^2 \times 17^2 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61$	108541009552015625
1009	$5^{672} \times 13^2$	8,624414447e+471
1010	$5^{100} \times 13^4 \times 17 \times 29$	1,1107613562e+77
1011	$5^{16} \times 13^{16} \times 17^6$	2,450796404e+36
1012	$5^4 \times 13^4 \times 17^2 \times 29^2 \times 37^2 \times 41^2$	9984318503117700625
1013	$2 \times 5^4 \times 13^4 \times 17^2 \times 29^2 \times 37^2 \times 41^2$	$2 \times$ 9984318503117700625
1014	$5^{12} \times 13^{12} \times 17^2 \times 29 \times 37$	1763834546441892250244140625
1015	$5^{28} \times 13^6 \times 17^4 \times 29$	4,355258315e+32
1016	$5^{126} \times 13 \times 17 \times 29 \times 37$	2,7874850189e+93
1017	$5^{36} \times 13^{10} \times 17^4$	1,6755190296e+41
1018	$2 \times 5^{36} \times 13^{10} \times 17^4$	$2 \times 1,675519029$e+41
1019	$2 \times 5^{96} \times 13^6 \times 17^2$	$2 \times 1,7606716560$e+76
1020	$5^{16} \times 13^4 \times 17^2 \times 29 \times 37 \times 41$	55408309493560791015625
1021	$2 \times 5^{156} \times 13^{12}$	$2 \times 2,5505914768$e+122
1022	$5^{72} \times 13^6 \times 17 \times 29$	5,039034656e+59
1023	$5^{30} \times 13^{10} \times 17^2 \times 29$	1,0760426709e+36
1024	$5^3 \times 13 \times 17 \times 29 \times 37 \times 41 \times 53 \times 61 \times 73 \times 89$	25527273812106625

TABLE 12 – Catégories 1000 à 1024

12 Cas des sommes transfuges

Nous avons vu précédemment que la multiplication par 2 d'un nombre N de catégorie n fait passer le produit $2 \times N$ dans la catégorie $n + 1$ si N est un carré.

La suite de l'évolution de ces transfuges de la catégorie n vers la catégorie $n + 1$ est également particulière. En prenant l'exemple de la catégorie 2, normalement, Le nombre 50 étant de catégorie 2, son double, le nombre 100, devrait être de la catégorie 2 également. Il ne l'est pas car la somme $5^2 + 5^2$ se transforme en $(5 + 5)^2 + (5 - 5)^2 = 10^2$ qui n'est plus une somme de 2 termes. Le double du transfuge montant rétrograde donc d'une catégorie. Cette descente de catégorie est alors en conformité avec la règle qui stipule qu'en multipliant un nombre par un carré parfait ($2 \times 2 = 2^2$ et 25 est de catégorie 1), on reste dans la même catégorie. Ce comportement se retrouve avec le point de départ 2442050 de la catégorie 14, dont le double 4884100 est de catégorie 13 tout comme sont quart 1221025.

A partir de là, on comprend que lorsque on multiplie le carré parfait $2^2 \times 5^2$ de catégorie 1 par 2, on repasse avec 200 ($2^3 \times 5^2$) en catégorie 2 et qu'avec 400 ($2^4 \times 5^2$) on retourne en catégorie 1. la règle :

$$2 \times \text{tous les exposants sont pairs : } \prod (e_i + 1) = 2 \times \text{Catégorie} - 1$$

est alors valable pour toutes puissances impaires de 2 et devient donc :

$$2^{2m-1} \times \text{tous les exposants sont pairs : } \prod (e_i + 1) = 2 \times \text{Catégorie} - 1$$

et le produit par une puissance paire de 2 (2^{2m}) ne change pas la catégorie du nombre de départ.

13 Annexe

13.1 Calcul des sommes de carrés

```
/* sommme_carre.c */

/*
    coéfficients des fractions continues pour divers nombres
*/

/*
  Historique du programme:/
  ************************

  R0.10: 07 février 2019 : première édition par BDC
  R0.11: 08 février 2019 : version avec compilateur 64 (BDC)
  R0.20 : 11 février 2019 : sortie des résultats dans des fichiers différents (BDC)
*/

/* déclaration des bibliothèques */

#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <time.h>
#include <malloc.h>

/* déclaration des constantes */

#define LIMITE_ENTREE 10001  /* 31624  limite des entrées pour les composants des sommes */
    /* limite de validité de la détermination des sommes identiques */
#define CARRE_LIM_ENT (unsigned long) ((LIMITE_ENTREE*LIMITE_ENTREE)-2*LIMITE_ENTREE+1)
#define LIMITE_NBR_SOMME 96 /* 120 limite de recherche du nombre de sommes identiques */
    /* taille de la mémoire pour la mémorisation des sommes */
#define RESERVATION_MEMOIRE ((LIMITE_ENTREE*(LIMITE_ENTREE+1))/2)
   /* limite du nombre de sommes enregistrées par fichier de catégorie */
```

```
#define LIMITE_AFFICHAGE 2000

/* déclaration des structures */

struct donnee
{
    unsigned long somme;
    unsigned int a;
    unsigned int b;
    unsigned char nbr_somme;
}; /* une somme de deux carré */

/* déclaration des fonctions */

static int cmp( void const *a, void const *b);

/* déclaration des variables globales */

/* fonction de tri */

static int cmp( void const *a, void const *b)
{
    struct donnee *pa = (struct donnee *) a;
    struct donnee *pb = (struct donnee *) b;

    return (pa->somme - pb->somme);
}

/****************/

int main ( int argc, char *argv[])
{
    unsigned int i, k;
    unsigned long  pos, emplacement;
    unsigned long bi, bk; /* compteur de boucle */
    struct donnee *calcul; /* pointeur sur données */
    unsigned char nbr_som;
    FILE *streamout;
    char nom_sortie[1024]; /* string pour la composition du nom des fichiers de sortie */

    if((calcul=(struct donnee *)malloc(sizeof(struct donnee)*(RESERVATION_MEMOIRE)))==NULL)
    {
        printf("Pas voulu la réservation en mémoire\n");
        return(0);
    }

    pos = 0;

    for(i = 1; i<LIMITE_ENTREE; i++) /* calcul des sommes des carré */
    {
        for(k = i; k<LIMITE_ENTREE; k++)
        {
            calcul[pos].somme = (unsigned long) (i*i + k*k);
            calcul[pos].a = (unsigned int) i;
            calcul[pos].b = (unsigned int) k;
            calcul[pos].nbr_somme = 1; /* par défaut somme unique */
            pos++;
        }
    }

/*** tri des sommes par valeur croissante de la somme ***/
    qsort(calcul, pos, sizeof(struct donnee), cmp);
```

```
    /*** recherche des sommes égales et détermination du nombre de ces sommes ***/

    nbr_som = 1; /* reprend le nombre total de sommes égales */

    for (bi = 1; bi<pos; bi++)
    {
        if(calcul[bi].somme == calcul[bi-1].somme)
        {
            nbr_som++; /* ajoute une somme commune */
        }
        else
        {
/* donne à la dernière somme de la suite le nombre de somme commune avant */
            calcul[bi-1].nbr_somme = nbr_som;
            nbr_som = 1;
        }
    }

    /* boucle pour retirer tous les résultats au dessus de CARRE_LIM_ENT */

    for (bi = 1; bi<pos; bi++)
    {
        if(calcul[bi].somme > CARRE_LIM_ENT)
        {
            pos = bi; /* garde la limite de vérification et sort de la boucle */
        }
    }

    sprintf(nom_sortie,"res_%i_%li.txt", LIMITE_ENTREE, CARRE_LIM_ENT);

    if((streamout = fopen (nom_sortie, "w")) == NULL)  /* fichier de sortie */
                {
/* sort du programme car enregistrement fichier de sortie impossible */
                    printf ("Creation du fichier %s impossible\n", nom_sortie);
                    return (2);
                }

    fprintf(streamout,"Somme de 2 carré jusqu'à %i : limite vérification %li \n\n"
              , LIMITE_ENTREE, CARRE_LIM_ENT);

    /* boucle de détermination du nombre de somme obtenues de x facon différentes */

    for(nbr_som = 2; nbr_som < LIMITE_NBR_SOMME; nbr_som++)
    {
        bk=0;

        for (bi = 1; bi<pos; bi++)
        {
            if(calcul[bi].nbr_somme == nbr_som )
            {
                bk++;
            }
        }

        fprintf(streamout,"%li sommes exclusivement à %i composantes \n", bk, nbr_som);
    }

    fclose(streamout);

    /* boucle d'écriture des sommes obtenues de x facon différentes */
```

```
    for(nbr_som = 2; nbr_som < LIMITE_NBR_SOMME; nbr_som++)
    {
        sprintf(nom_sortie,"%i_res_%i_%li.txt", nbr_som, LIMITE_ENTREE, CARRE_LIM_ENT);

    if((streamout = fopen (nom_sortie, "w")) == NULL)  /* fichier de sortie */
                    {
/* sort du programme car enregistrement fichier de sortie impossible */
                        printf ("Creation du fichier %s impossible\n", nom_sortie);
                        return (3);
                    }
                    emplacement = 0; /* numéro d'emplacement de la somme */

        for (bi = 1; bi<pos; bi++)
        {
            if(calcul[bi].nbr_somme == nbr_som )
            {
                emplacement++;
                fprintf(streamout, "%li : %li = ", emplacement, calcul[bi].somme);
                for(bk = bi; bk> bi-nbr_som; bk--)
                {
                    fprintf(streamout, "(%i;%i)", calcul[bk].a, calcul[bk].b);
                }
                fprintf(streamout, "\n");
/* pour n'écrire que les LIMITE_AFFICHAGE premiers termes de chaques nbr somme */
                if (emplacement> LIMITE_AFFICHAGE) {bi = pos;};
            }
        }
        fprintf(streamout, "\n");
        fclose(streamout);
    }

    free(calcul); /* libère la mémoire avant cloture */

    return(1); /* programme se termine normalement */
}
```

13.2 Vérification de la catégorie d'un nombre

```
/* test_somme_carre.c */

/*
 Teste la catégorie de somme de 2 carré du nombre donné en argument
*/

/*
  Historique du programme:/
  ***********************

  R0.1.: 12 février 2019 : première édition par BDC
*/

#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define VERSION "0.1"
#define DATE_VERSION "12 fevrier 2019"

int main(int argc, char *argv[])
```

```
{
    unsigned long long nombre; /* nombre en entrée */
    unsigned long long racine_nombre; /* racine carrée du nombre à tester */
    unsigned long long fin_boucle; /* limite inférieure de la boucle */
    unsigned long long reste; /* second entier de la vérification */
    unsigned long long i; /* compteur */
    unsigned int compte_categorie; /* compteur de catégorie */

    if (argc!=2) /* le nombre d'arguments de la ligne de commande doit être = 2 */
    {
        printf ("test_somme_carre.exe version %s du %s\n
  Determine la categorie du nombre en entree.\n\
  Ce nombre doit etre un entier de type unsigned long long\n\
  syntaxe : test_somme_carre nombre_a_tester\n\
  exemple : test_somme_carre 105625\n", VERSION, DATE_VERSION);
    return(1);
    } /* end if (argc!=2) */

    compte_categorie = 0; /* par défaut pas de somme carrée trouvée */

    nombre = (unsigned long long) atoll(argv[1]);
    printf("Nombre = %llu\n", nombre);
    racine_nombre = (unsigned long long) sqrt(nombre);
    printf("Racine = %llu\n", racine_nombre);
    fin_boucle = (unsigned long long) racine_nombre/sqrt(2);
    printf("Fin de la boucle = %llu\n", fin_boucle);

    /* boucle de recherche des sommes carre */

    for (i = racine_nombre; i> fin_boucle; i--)
    {
        reste = (unsigned long long) sqrt(nombre - i*i);
        if((reste*reste + i*i)== nombre && reste > 0)
        {
            compte_categorie++;
            printf("%i : (%llu,%llu)\n", compte_categorie, i, reste);
        }

    }

    printf("\n%llu est de categorie %i\n", nombre, compte_categorie);

    return 0;
}
```

13.3 catégorie 1024

```
Nombre = 25527273812106625
Racine = 159772569
Fin de la boucle = 112976266
1 : (159772569,2692) 2 : (159772560,53695) 3 : (159772065,401320) 4 : (159771720,520865)
5 : (159771455,596640) 6 : (159771201,661168) 7 : (159770305,850560) 8 : (159769412,1004391)
9 : (159768415,1152120) 10 : (159767676,1250407) 11 : (159767135,1317720) 12 : (159767065,1326180)
13 : (159766660,1374105) 14 : (159766092,1438631) 15 : (159766028,1445721) 16 : (159760036,2001177)
17 : (159759807,2019376) 18 : (159759640,2032545) 19 : (159758720,2103615) 20 : (159754905,2375740)
21 : (159753689,2456148) 22 : (159752640,2523455) 23 : (159750567,2651444) 24 : (159749796,2697497)
25 : (159744420,2999015) 26 : (159743280,3059135) 27 : (159741145,3168660) 28 : (159739452,3252889)
29 : (159738785,3285480) 30 : (159735356,3448167) 31 : (159730804,3652953) 32 : (159729904,3692097)
33 : (159728833,3738144) 34 : (159727935,3776320) 35 : (159712793,4370076) 36 : (159711380,4421415)
37 : (159711137,4430184) 38 : (159711015,4434580) 39 : (159709503,4488704) 40 : (159709440,4490945)
41 : (159703617,4693456) 42 : (159703399,4700868) 43 : (159701120,4777665) 44 : (159697241,4905612)
45 : (159696072,4943521) 46 : (159695160,4972895) 47 : (159693840,5015105) 48 : (159685055,5287440)
49 : (159678145,5492160) 50 : (159670788,5702041) 51 : (159667545,5792140) 52 : (159664780,5867865)
53 : (159646940,6334695) 54 : (159627303,6811604) 55 : (159625497,6853796) 56 : (159623207,6906924)
57 : (159616999,7048932) 58 : (159613260,7133095) 59 : (159602329,7373628) 60 : (159601488,7391809)
```

61 : (159594585,7539380) 62 : (159591527,7603836) 63 : (159580808,7825569) 64 : (159574824,7946657)
65 : (159567740,8087655) 66 : (159558495,8268040) 67 : (159552264,8387423) 68 : (159544180,8539815)
69 : (159528609,8825912) 70 : (159526495,8864040) 71 : (159520380,8973415) 72 : (159500735,9316080)
73 : (159496543,9387576) 74 : (159493220,9443865) 75 : (159492960,9448255) 76 : (159492441,9457012)
77 : (159481648,9637311) 78 : (159472295,9790860) 79 : (159457456,10029633) 80 : (159445095,10224260)
81 : (159444135,10239220) 82 : (159440228,10299879) 83 : (159427448,10495839) 84 : (159426892,10504281)
85 : (159421152,10591039) 86 : (159413364,10707623) 87 : (159405985,10816920) 88 : (159382380,11159335)
89 : (159377860,11223705) 90 : (159373889,11279952) 91 : (159372519,11299292) 92 : (159364020,11418535)
93 : (159357977,11502564) 94 : (159345945,11668060) 95 : (159333183,11841056) 96 : (159330855,11872340)
97 : (159328180,11908185) 98 : (159315648,12074689) 99 : (159315112,12081759) 100 : (159288615,12426220)
101 : (159273305,12620940) 102 : (159272144,12635583) 103 : (159269660,12666855) 104 : (159266628,12704921)
105 : (159245468,12967449) 106 : (159227297,13188696) 107 : (159219393,13283776) 108 : (159214015,13348080)
109 : (159180481,13742208) 110 : (159179871,13749272) 111 : (159174305,13813560) 112 : (159169420,13869735)
113 : (159165415,13915620) 114 : (159159873,13978864) 115 : (159152480,14062785) 116 : (159134320,14266815)
117 : (159129476,14320743) 118 : (159128295,14333860) 119 : (159116760,14461345) 120 : (159098265,14663420)
121 : (159093576,14714207) 122 : (159079335,14867380) 123 : (159069104,14976447) 124 : (159065520,15014465)
125 : (159061185,15060320) 126 : (159055860,15116455) 127 : (159049872,15179329) 128 : (159049068,15187751)
129 : (159044505,15235460) 130 : (159042655,15254760) 131 : (159010980,15581465) 132 : (158994343,15750324)
133 : (158973279,15961528) 134 : (158966540,16028505) 135 : (158946751,16223568) 136 : (158945860,16232295)
137 : (158939673,16292764) 138 : (158930783,16379256) 139 : (158918120,16501665) 140 : (158881319,16852308)
141 : (158856436,17085273) 142 : (158819784,17422687) 143 : (158801640,17587295) 144 : (158797432,17625249)
145 : (158795292,17644519) 146 : (158793281,17662608) 147 : (158789055,17700560) 148 : (158770623,17865136)
149 : (158730913,18214584) 150 : (158717240,18333345) 151 : (158707551,18417032) 152 : (158705452,18435111)
153 : (158683809,18620488) 154 : (158674960,18695745) 155 : (158664385,18785280) 156 : (158660927,18814464)
157 : (158639556,18993817) 158 : (158631272,19062879) 159 : (158623560,19126945) 160 : (158599632,19324351)
161 : (158592348,19384039) 162 : (158582105,19467660) 163 : (158568720,19576385) 164 : (158552985,19703420)
165 : (158509740,20048345) 166 : (158508639,20057048) 167 : (158503719,20095892) 168 : (158494695,20166940)
169 : (158433740,20640345) 170 : (158419551,20748968) 171 : (158410305,20819440) 172 : (158391847,20959404)
173 : (158384735,21013080) 174 : (158374612,21089241) 175 : (158357665,21216120) 176 : (158346456,21299617)
177 : (158337980,21362535) 178 : (158331815,21408180) 179 : (158315568,21527999) 180 : (158282945,21766560)
181 : (158251944,21990817) 182 : (158249880,22005665) 183 : (158244616,22043487) 184 : (158238784,22085313)
185 : (158229465,22151980) 186 : (158200935,22354820) 187 : (158090280,23124385) 188 : (158081471,23184528)
189 : (158079295,23199360) 190 : (158050860,23392295) 191 : (158046264,23423327) 192 : (158020740,23594905)
193 : (158010785,23661480) 194 : (157963872,23972671) 195 : (157962808,23979681) 196 : (157953772,24039129)
197 : (157944615,24099220) 198 : (157933008,24175169) 199 : (157903336,24368223) 200 : (157901095,24382740)
201 : (157892480,24438465) 202 : (157890465,24451480) 203 : (157875687,24546716) 204 : (157844249,24748068)
205 : (157812391,24950412) 206 : (157800540,25025255) 207 : (157790420,25088985) 208 : (157782887,25136316)
209 : (157731940,25454055) 210 : (157712580,25573735) 211 : (157707359,25605912) 212 : (157693401,25691732)
213 : (157685988,25737191) 214 : (157676895,25792840) 215 : (157676185,25797180) 216 : (157666465,25856520)
217 : (157577688,26392159) 218 : (157569255,26442460) 219 : (157519065,26739820) 220 : (157501887,26840816)
221 : (157487257,26926524) 222 : (157481760,26958655) 223 : (157406401,27395232) 224 : (157387080,27506015)
225 : (157374017,27580656) 226 : (157357020,27677465) 227 : (157345345,27743760) 228 : (157331361,27822952)
229 : (157286055,28077940) 230 : (157283740,28090905) 231 : (157271228,28160871) 232 : (157236684,28353113)
233 : (157225220,28416615) 234 : (157153832,28808799) 235 : (157144060,28862055) 236 : (157143655,28864260)
237 : (157131480,28930465) 238 : (157118496,29000897) 239 : (157058585,29323620) 240 : (157055833,29338356)
241 : (157044660,29398105) 242 : (157013351,29564868) 243 : (156997740,29647655) 244 : (156975513,29765116)
245 : (156926233,30023844) 246 : (156910380,30106585) 247 : (156899745,30161960) 248 : (156886209,30232288)
249 : (156879028,30269529) 250 : (156840092,30470631) 251 : (156799905,30676760) 252 : (156786535,30745020)
253 : (156776644,30795417) 254 : (156774105,30808340) 255 : (156707560,31145055) 256 : (156695172,31207321)
257 : (156686169,31252492) 258 : (156678695,31289940) 259 : (156661080,31378015) 260 : (156653576,31415457)
261 : (156644513,31460616) 262 : (156563920,31859265) 263 : (156551040,31922495) 264 : (156506535,32139980)
265 : (156494943,32196376) 266 : (156453537,32396984) 267 : (156445593,32435324) 268 : (156436236,32480423)
269 : (156396412,32671641) 270 : (156323935,33016680) 271 : (156306504,33099103) 272 : (156294036,33157927)
273 : (156281876,33215193) 274 : (156271265,33265080) 275 : (156239164,33415527) 276 : (156186649,33660132)
277 : (156180455,33688860) 278 : (156171545,33730140) 279 : (156161420,33776985) 280 : (156157320,33795935)
281 : (156145383,33851044) 282 : (156005560,34489695) 283 : (155991015,34555420) 284 : (155989185,34563680)
285 : (155963280,34680385) 286 : (155946585,34755380) 287 : (155930084,34829337) 288 : (155887455,35019640)
289 : (155885532,35028199) 290 : (155876268,35069401) 291 : (155834844,35253017) 292 : (155758753,35587704)
293 : (155742785,35657520) 294 : (155729208,35716769) 295 : (155709748,35801511) 296 : (155686760,35901345)
297 : (155652121,36051228) 298 : (155632479,36135928) 299 : (155618720,36195135) 300 : (155581120,36356415)
301 : (155553561,36474148) 302 : (155469240,36831905) 303 : (155424167,37021644) 304 : (155416895,37052160)
305 : (155388735,37170080) 306 : (155360880,37286335) 307 : (155336940,37385945) 308 : (155321828,37448679)
309 : (155302305,37529560) 310 : (155287135,37592280) 311 : (155206020,37925785) 312 : (155189004,37995353)
313 : (155175585,38050120) 314 : (155172448,38062911) 315 : (155159540,38115495) 316 : (155149460,38156505)
317 : (155129319,38238308) 318 : (155082457,38427924) 319 : (155063960,38502495) 320 : (155034777,38619836)
321 : (155033063,38626716) 322 : (154983880,38823585) 323 : (154921191,39072988) 324 : (154897831,39165492)
325 : (154843264,39380673) 326 : (154842180,39384935) 327 : (154838484,39399463) 328 : (154828824,39437407)
329 : (154778136,39635873) 330 : (154757215,39717480) 331 : (154708545,39906640) 332 : (154692415,39969120)
333 : (154644927,40152464) 334 : (154629640,40211295) 335 : (154578527,40407336) 336 : (154577960,40409505)
337 : (154568865,40444280) 338 : (154560921,40474628) 339 : (154524711,40612652) 340 : (154417447,41018604)
341 : (154386360,41135455) 342 : (154374495,41179960) 343 : (154343640,41295455) 344 : (154269168,41572799)
345 : (154238724,41685607) 346 : (154216016,41769537) 347 : (154213804,41777703) 348 : (154090988,42228441)
349 : (154046055,42392060) 350 : (154029916,42450663) 351 : (154027585,42459120) 352 : (153938367,42781456)
353 : (153934840,42794145) 354 : (153900505,42917460) 355 : (153832103,43161996) 356 : (153778265,43353420)
357 : (153760743,43415524) 358 : (153705241,43611612) 359 : (153700272,43629121) 360 : (153689840,43665855)
361 : (153684540,43684505) 362 : (153659865,43771220) 363 : (153565480,44101215) 364 : (153547656,44163233)
365 : (153545696,44170047) 366 : (153526452,44236889) 367 : (153493552,44350911) 368 : (153470145,44431840)
369 : (153413055,44628560) 370 : (153382420,44733735) 371 : (153371724,44770393) 372 : (153366623,44787864)
373 : (153307620,44989415) 374 : (153303911,45002052) 375 : (153235009,45236112) 376 : (153207969,45327608)
377 : (153141336,45552223) 378 : (153026855,45935340) 379 : (153007488,45999809) 380 : (153005052,46007911)
381 : (152979992,46091169) 382 : (152970585,46122380) 383 : (152946244,46203033) 384 : (152828135,46592220)
385 : (152809305,46653940) 386 : (152779359,46751912) 387 : (152675820,47088935) 388 : (152667156,47117017)
389 : (152655967,47153256) 390 : (152634815,47221680) 391 : (152618140,47275545) 392 : (152613793,47289576)

```
393 : (152604505,47319540) 394 : (152593191,47356012) 395 : (152533020,47549465) 396 : (152514919,47607492)
397 : (152496991,47664888) 398 : (152439065,47849820) 399 : (152403220,47963865) 400 : (152400680,47971935)
401 : (152380455,48036140) 402 : (152318745,48231460) 403 : (152293292,48311769) 404 : (152281448,48349089)
405 : (152259760,48417345) 406 : (152100660,48914855) 407 : (152082240,48972095) 408 : (152080892,48976281)
409 : (151999020,49229785) 410 : (151983297,49278304) 411 : (151975329,49302872) 412 : (151935780,49424615)
413 : (151914943,49488624) 414 : (151901857,49528776) 415 : (151890015,49565080) 416 : (151875720,49608865)
417 : (151838559,49722488) 418 : (151814960,49794495) 419 : (151687385,50181780) 420 : (151659044,50267367)
421 : (151640920,50322015) 422 : (151576280,50516385) 423 : (151570855,50532660) 424 : (151505945,50726940)
425 : (151458976,50867007) 426 : (151328665,51253380) 427 : (151304340,51325145) 428 : (151265895,51438340)
429 : (151251060,51481945) 430 : (151231463,51539484) 431 : (151203393,51621776) 432 : (151153620,51767335)
433 : (151137087,51815584) 434 : (151049049,52071668) 435 : (151029441,52128512) 436 : (150920487,52443116)
437 : (150861104,52613697) 438 : (150858215,52621980) 439 : (150821695,52726560) 440 : (150793872,52806079)
441 : (150726048,52999361) 442 : (150703705,53062860) 443 : (150700895,53070840) 444 : (150663504,53176897)
445 : (150661144,53183583) 446 : (150556095,53480240) 447 : (150488160,53671105) 448 : (150475328,53707071)
449 : (150469209,53724212) 450 : (150464780,53736615) 451 : (150459839,53750448) 452 : (150440860,53803545)
453 : (150403935,53906680) 454 : (150394017,53934344) 455 : (150239808,54362431) 456 : (150217840,54423105)
457 : (150199388,54474009) 458 : (150078815,54805320) 459 : (150049896,54884447) 460 : (150038695,54915060)
461 : (150001008,55017919) 462 : (149982688,55067841) 463 : (149882471,55340028) 464 : (149762940,55662695)
465 : (149644360,55980705) 466 : (149639745,55993040) 467 : (149620761,56043748) 468 : (149559615,56206720)
469 : (149546177,56242464) 470 : (149507580,56344985) 471 : (149435220,56536615) 472 : (149363295,56726360)
473 : (149338585,56791380) 474 : (149313113,56858316) 475 : (149190624,57178943) 476 : (149158335,57263120)
477 : (149151385,57281220) 478 : (149131160,57333855) 479 : (149107992,57394081) 480 : (149034664,57584223)
481 : (148962880,57769665) 482 : (148939536,57829823) 483 : (148870880,58006335) 484 : (148848801,58062968)
485 : (148824359,58125588) 486 : (148774239,58253752) 487 : (148702913,58435584) 488 : (148697540,58449255)
489 : (148672080,58513985) 490 : (148609855,58671840) 491 : (148498849,58952232) 492 : (148481848,58995039)
493 : (148437665,59106120) 494 : (148434535,59113980) 495 : (148416796,59158503) 496 : (148409616,59176513)
497 : (148252185,59569820) 498 : (148207572,59680729) 499 : (148190361,59723452) 500 : (148145120,59835585)
501 : (148119897,59897996) 502 : (148042983,60087844) 503 : (147987360,60224705) 504 : (147940929,60338672)
505 : (147921660,60385895) 506 : (147908071,60419172) 507 : (147830489,60608748) 508 : (147807420,60664985)
509 : (147735404,60840153) 510 : (147710820,60899815) 511 : (147636260,61080345) 512 : (147510465,61383520)
513 : (147504705,61397360) 514 : (147503015,61401420) 515 : (147481336,61453473) 516 : (147417560,61606305)
517 : (147281255,61931460) 518 : (147202480,62118465) 519 : (147152665,62236380) 520 : (147122720,62307135)
521 : (147093153,62376904) 522 : (147046440,62486945) 523 : (147013471,62564472) 524 : (146996929,62603328)
525 : (146975705,62653140) 526 : (146970540,62665255) 527 : (146948415,62717120) 528 : (146923073,62776464)
529 : (146920287,62782984) 530 : (146787876,63091943) 531 : (146785076,63098457) 532 : (146759580,63157735)
533 : (146701119,63293408) 534 : (146693908,63310119) 535 : (146660505,63387460) 536 : (146613036,63497177)
537 : (146564812,63608409) 538 : (146552320,63637185) 539 : (146508164,63738777) 540 : (146474535,63816020)
541 : (146278745,64263540) 542 : (146212057,64415124) 543 : (146187540,64470745) 544 : (146090215,64690980)
545 : (146048705,64784640) 546 : (146022951,64842668) 547 : (146004252,64884761) 548 : (145988740,64919655)
549 : (145742655,65470240) 550 : (145725345,65508760) 551 : (145721748,65516761) 552 : (145697732,65570151)
553 : (145613548,65756889) 554 : (145610496,65763647) 555 : (145578855,65833660) 556 : (145529556,65942567)
557 : (145526064,65950273) 558 : (145498265,66011580) 559 : (145291841,66464688) 560 : (145203417,66657644)
561 : (145195327,66675264) 562 : (145178983,66710844) 563 : (145175320,66718815) 564 : (145157680,66757185)
565 : (145093337,66896916) 566 : (144976060,67150695) 567 : (144929985,67250080) 568 : (144904665,67304620)
569 : (144869156,67381017) 570 : (144757884,67619737) 571 : (144728432,67682751) 572 : (144601020,67954535)
573 : (144513780,68139865) 574 : (144489216,68191937) 575 : (144481447,68208396) 576 : (144394329,68392628)
577 : (144366695,68450940) 578 : (144295527,68600836) 579 : (144243431,68710308) 580 : (144191980,68818215)
581 : (144172135,68859780) 582 : (144155673,68894236) 583 : (144147824,68910657) 584 : (144116920,68975265)
585 : (144053081,69108492) 586 : (143904288,69417791) 587 : (143876240,69475905) 588 : (143862596,69504153)
589 : (143845980,69538535) 590 : (143648340,69945895) 591 : (143616972,70010279) 592 : (143592255,70060960)
593 : (143439480,70373215) 594 : (143386785,70480520) 595 : (143313049,70630332) 596 : (143274591,70708312)
597 : (143247680,70762815) 598 : (143241040,70776255) 599 : (143126937,71006716) 600 : (143095335,71070380)
601 : (143063463,71134516) 602 : (143033480,71194785) 603 : (143032481,71196792) 604 : (143008345,71245260)
605 : (142979559,71303012) 606 : (142830145,71601840) 607 : (142801215,71659520) 608 : (142775916,71709913)
609 : (142713505,71834040) 610 : (142681535,71897520) 611 : (142675608,71909281) 612 : (142565628,72127079)
613 : (142558860,72140455) 614 : (142522532,72212199) 615 : (142492095,72272240) 616 : (142416487,72421116)
617 : (142413273,72427436) 618 : (142362260,72527655) 619 : (142204121,72837228) 620 : (142160601,72922132)
621 : (142145720,72951135) 622 : (142059144,73119583) 623 : (141938416,73353663) 624 : (141920880,73387585)
625 : (141906468,73415449) 626 : (141650364,73908377) 627 : (141647084,73914663) 628 : (141619256,73967967)
629 : (141617220,73971865) 630 : (141591105,74021840) 631 : (141569760,74062655) 632 : (141514305,74168560)
633 : (141457985,74275920) 634 : (141380769,74422792) 635 : (141285727,74603064) 636 : (141255585,74660120)
637 : (141220160,74727105) 638 : (141124240,74908095) 639 : (140983260,75173095) 640 : (140977063,75184716)
641 : (140950520,75234465) 642 : (140815224,75487393) 643 : (140786495,75540960) 644 : (140758055,75593940)
645 : (140706192,75690431) 646 : (140605516,75877287) 647 : (140573535,75936520) 648 : (140500356,76071833)
649 : (140480244,76108967) 650 : (140476065,76116680) 651 : (140383052,76288089) 652 : (140346855,76354660)
653 : (140108223,76791664) 654 : (140014241,76962888) 655 : (139973640,77036705) 656 : (139874760,77216095)
657 : (139842215,77275020) 658 : (139821785,77311980) 659 : (139803303,77345396) 660 : (139686292,77556519)
661 : (139528968,77839199) 662 : (139510360,77872545) 663 : (139487905,77912760) 664 : (139456935,77968180)
665 : (139415804,78041703) 666 : (139406913,78057584) 667 : (139315636,78220377) 668 : (139289120,78267585)
669 : (139219908,78390631) 670 : (139178079,78464872) 671 : (139131199,78547968) 672 : (138937537,78890016)
673 : (138895920,78963265) 674 : (138841140,79059545) 675 : (138836799,79067168) 676 : (138706271,79295928)
677 : (138664440,79369055) 678 : (138600807,79480124) 679 : (138581936,79513023) 680 : (138546280,79575135)
681 : (138375015,79872580) 682 : (138342745,79928460) 683 : (138314528,79977279) 684 : (138307935,79988680)
685 : (138217420,80144985) 686 : (138202676,80170407) 687 : (138157415,80248380) 688 : (138119340,80313895)
689 : (138080703,80380304) 690 : (138016260,80490905) 691 : (137973799,80563668) 692 : (137913921,80666128)
693 : (137735580,80970265) 694 : (137651580,81112985) 695 : (137622945,81161560) 696 : (137620711,81165348)
697 : (137613095,81178260) 698 : (137593689,81211148) 699 : (137446032,81460801) 700 : (137346344,81628767)
701 : (137216440,81846945) 702 : (137061712,82105791) 703 : (137035495,82149540) 704 : (136972180,82255065)
705 : (136896065,82381680) 706 : (136790335,82557120) 707 : (136755540,82614745) 708 : (136607167,82859856)
709 : (136557663,82941416) 710 : (136386980,83221785) 711 : (136376880,83238335) 712 : (136351905,83279240)
713 : (136347495,83286460) 714 : (136314561,83340352) 715 : (136285140,83388455) 716 : (136261095,83427740)
717 : (136183896,83553697) 718 : (136103385,83684780) 719 : (136076664,83728223) 720 : (136014436,83829273)
721 : (135977928,83888479) 722 : (135970215,83900980) 723 : (135902952,84009889) 724 : (135867545,84067140)
```

```
725 : (135759655,84241260) 726 : (135727596,84292903) 727 : (135681704,84366753) 728 : (135657377,84405864)
729 : (135627580,84453735) 730 : (135593460,84508505) 731 : (135380060,84849945) 732 : (135345780,84904615)
733 : (135315807,84952376) 734 : (135305497,84968796) 735 : (135036255,85396040) 736 : (135015841,85428312)
737 : (134999065,85454820) 738 : (134991208,85467231) 739 : (134890424,85626207) 740 : (134886624,85632193)
741 : (134780536,85799073) 742 : (134701145,85923660) 743 : (134607455,86070360) 744 : (134588088,86100641)
745 : (134578279,86115972) 746 : (134571180,86127065) 747 : (134477592,86273119) 748 : (134387920,86412735)
749 : (134342337,86483584) 750 : (134236511,86647752) 751 : (134201505,86701960) 752 : (134014940,86990055)
753 : (133955265,87081920) 754 : (133891545,87179860) 755 : (133698840,87475105) 756 : (133690632,87487649)
757 : (133669188,87520409) 758 : (133452352,87850689) 759 : (133367705,87979140) 760 : (133307352,88070561)
761 : (133268160,88129855) 762 : (133263321,88137172) 763 : (133260895,88140840) 764 : (133229780,88187865)
765 : (133190236,88247577) 766 : (133117849,88356732) 767 : (133000353,88533496) 768 : (132939620,88624665)
769 : (132877209,88718212) 770 : (132872511,88725248) 771 : (132759233,88894656) 772 : (132674265,89021420)
773 : (132612513,89113384) 774 : (132607620,89120665) 775 : (132506785,89270520) 776 : (132199296,89725247)
777 : (132106040,89862495) 778 : (131970465,90061480) 779 : (131936192,90111681) 780 : (131910209,90149712)
781 : (131842720,90248385) 782 : (131799903,90310904) 783 : (131518369,90720408) 784 : (131485119,90768592)
785 : (131368641,90937088) 786 : (131358876,90951193) 787 : (131252543,91104576) 788 : (131242164,91119527)
789 : (131209320,91166815) 790 : (131157855,91240840) 791 : (131037812,91413159) 792 : (130924572,91575271)
793 : (130920508,91581081) 794 : (130812524,91735257) 795 : (130786073,91772964) 796 : (130764135,91804220)
797 : (130739865,91838780) 798 : (130701160,91893855) 799 : (130627495,91998540) 800 : (130583240,92061345)
801 : (130462119,92232908) 802 : (130429560,92278945) 803 : (130427020,92282535) 804 : (130421953,92289696)
805 : (130392280,92331615) 806 : (130089732,92757401) 807 : (130048140,92815705) 808 : (129976415,92916120)
809 : (129857185,93082680) 810 : (129817956,93137383) 811 : (129813024,93144257) 812 : (129762316,93214887)
813 : (129743295,93241360) 814 : (129694112,93309759) 815 : (129630105,93398660) 816 : (129594945,93447440)
817 : (129559384,93496737) 818 : (129418335,93691880) 819 : (129391320,93729185) 820 : (129358233,93774844)
821 : (129316185,93832820) 822 : (129276640,93887295) 823 : (129229368,93952351) 824 : (129069145,94172340)
825 : (129027239,94229748) 826 : (129008735,94255080) 827 : (128970657,94307176) 828 : (128680255,94703040)
829 : (128637791,94760712) 830 : (128609360,94799295) 831 : (128604340,94806105) 832 : (128564385,94860280)
833 : (128506004,94939353) 834 : (128326580,95181735) 835 : (128175148,95385561) 836 : (128129895,95446340)
837 : (128058444,95542183) 838 : (127976104,95652447) 839 : (127850265,95820580) 840 : (127816440,95865695)
841 : (127785831,95906492) 842 : (127750681,95953308) 843 : (127627559,96117012) 844 : (127576860,96184295)
845 : (127504857,96279724) 846 : (127459180,96340185) 847 : (127420260,96391655) 848 : (127305908,96542631)
849 : (127212895,96665160) 850 : (127158328,96736929) 851 : (127146588,96752359) 852 : (127123460,96782745)
853 : (127023076,96914457) 854 : (127017944,96921183) 855 : (126988865,96959280) 856 : (126949695,97010560)
857 : (126674271,97369928) 858 : (126596220,97471385) 859 : (126588185,97481820) 860 : (126544807,97538124)
861 : (126383847,97746596) 862 : (126378480,97753535) 863 : (126341281,97801608) 864 : (126288039,97870348)
865 : (125996127,98245864) 866 : (125959143,98293276) 867 : (125891720,98379615) 868 : (125819740,98471655)
869 : (125642548,98697639) 870 : (125568665,98791620) 871 : (125540180,98827815) 872 : (125516556,98857817)
873 : (125116255,99363960) 874 : (125108064,99374273) 875 : (125096743,99388524) 876 : (125074380,99416665)
877 : (125072985,99418420) 878 : (124946820,99576935) 879 : (124894297,99642804) 880 : (124790745,99772460)
881 : (124772391,99795412) 882 : (124750439,99822852) 883 : (124746009,99828388) 884 : (124628313,99975284)
885 : (124575580,100040985) 886 : (124447220,100200615) 887 : (124413256,100242783) 888 : (124258752,100434239)
889 : (124211105,100493160) 890 : (124049196,100692953) 891 : (123916735,100855920) 892 : (123840372,100949671)
893 : (123614880,101225665) 894 : (123588120,101258335) 895 : (123545447,101310396) 896 : (123464240,101409345)
897 : (123410751,101474432) 898 : (123246105,101674340) 899 : (123205031,101724108) 900 : (123152040,101788255)
901 : (123110920,101837985) 902 : (123045596,101916903) 903 : (122969305,102008940) 904 : (122891865,102102220)
905 : (122801599,102210768) 906 : (122747068,102276249) 907 : (122685972,102349529) 908 : (122511455,102558360)
909 : (122433804,102651047) 910 : (122327340,102777895) 911 : (122302772,102807129) 912 : (122232255,102890960)
913 : (122133132,103008601) 914 : (122010940,103153305) 915 : (121971687,103199716) 916 : (121928257,103251024)
917 : (121925415,103254380) 918 : (121703320,103516065) 919 : (121548185,103698180) 920 : (121421520,103846465)
921 : (121411776,103857857) 922 : (121372255,103904040) 923 : (121322276,103962393) 924 : (121244455,104053140)
925 : (121238945,104059560) 926 : (121195092,104110631) 927 : (121034636,104297127) 928 : (120810303,104556896)
929 : (120768065,104605680) 930 : (120731140,104648295) 931 : (120718440,104662945) 932 : (120687039,104699152)
933 : (120659361,104731048) 934 : (120640095,104753240) 935 : (120475920,104942015) 936 : (120374823,105057964)
937 : (120341280,105096385) 938 : (120317633,105123456) 939 : (120207705,105249140) 940 : (119975160,105514145)
941 : (119846080,105660735) 942 : (119815615,105695280) 943 : (119615905,105921240) 944 : (119468620,106087335)
945 : (119425764,106135577) 946 : (119362364,106206873) 947 : (119099060,106502055) 948 : (119051308,106555431)
949 : (119039169,106568992) 950 : (119013695,106597440) 951 : (118982960,106631745) 952 : (118940580,106679015)
953 : (118884313,106741716) 954 : (118747367,106894044) 955 : (118711135,106934280) 956 : (118702320,106944065)
957 : (118667937,106982216) 958 : (118621351,107033868) 959 : (118616601,107039132) 960 : (118480560,107189695)
961 : (118343040,107341505) 962 : (118269415,107422620) 963 : (118243737,107450884) 964 : (118231496,107464353)
965 : (118212756,107484967) 966 : (118174815,107526680) 967 : (118094328,107615071) 968 : (118081268,107629401)
969 : (117916768,107809599) 970 : (117859905,107871760) 971 : (117745280,107996865) 972 : (117694047,108052696)
973 : (117556129,108202728) 974 : (117423260,108346905) 975 : (117417311,108353352) 976 : (117377601,108396368)
977 : (117376080,108398015) 978 : (117233497,108552204) 979 : (117068424,108730207) 980 : (116842968,108972449)
981 : (116833985,108982080) 982 : (116602215,109230020) 983 : (116556184,109279137) 984 : (116488935,109350820)
985 : (116437060,109406055) 986 : (116410908,109433881) 987 : (116055980,109810215) 988 : (115973785,109897020)
989 : (115903295,109971360) 990 : (115722521,110161572) 991 : (115695521,110189928) 992 : (115660340,110226855)
993 : (115422681,110475692) 994 : (115285095,110619260) 995 : (115243455,110662640) 996 : (115240409,110665812)
997 : (115185088,110723391) 998 : (115109145,110802340) 999 : (115086536,110825823) 1000 : (115020336,110894527)
1001 : (115002408,110913119) 1002 : (114778785,111144520) 1003 : (114745440,111178945) 1004 : (114700528,111225279)
1005 : (114695592,111230369) 1006 : (114362785,111572520) 1007 : (114295463,111641484) 1008 : (114286260,111650905)
1009 : (114246849,111691232) 1010 : (114236580,111701735) 1011 : (114099940,111841305) 1012 : (114046145,111896160)
1013 : (113956460,111987495) 1014 : (113852863,112092816) 1015 : (113820544,112125633) 1016 : (113735655,112211740)
1017 : (113688368,112259649) 1018 : (113566420,112383015) 1019 : (113544352,112405311) 1020 : (113407065,112543820)
1021 : (113396505,112554460) 1022 : (113353676,112597593) 1023 : (113292384,112659263) 1024 : (113147856,112804417)

25527273812106625 est de categorie 1024
```